# Histogram

$$H(k) = card\{(n,m) | f(n,m) = k\} \quad dla \quad k = 0..K-1$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} H(k) = WH$$

$$H_n(k) = \frac{1}{WH} H(k)$$

Ogólnie:

$$\begin{aligned} f &: X \times Y \to Z \\ f^{-1} &: Z \to \mathbf{2}^{X \times Y} \\ f^{-1}(z) &= \{(x,y) | f(x,y) = z\} \end{aligned}$$

$$H(z) = \int \chi_{f^{-1}(z)} dxdy$$

# Transformacje punktowe obrazów

Normalizacja dziedziny i przeciwdziedziny:

$$0 \le z \le 1$$
$$v = T(z)$$
$$0 \le T(z) \le 1$$
$$z = T^{-1}(v)$$

$H_n(z)$ – histogram obrazu oryginalnego

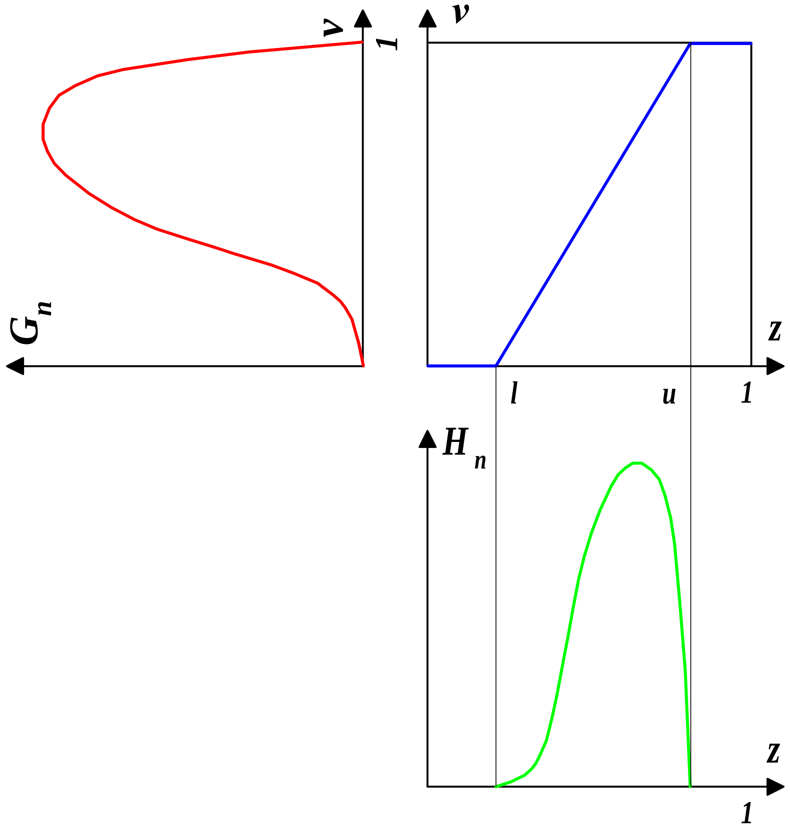
$G_n(v)$ – histogram obrazu po transformacji $T$

$$G_n(v) = \left[ H_n(z) \frac{dz}{dv} \right]_{z=T^{-1}(v)}$$

Przykład $T$ (negatyw):

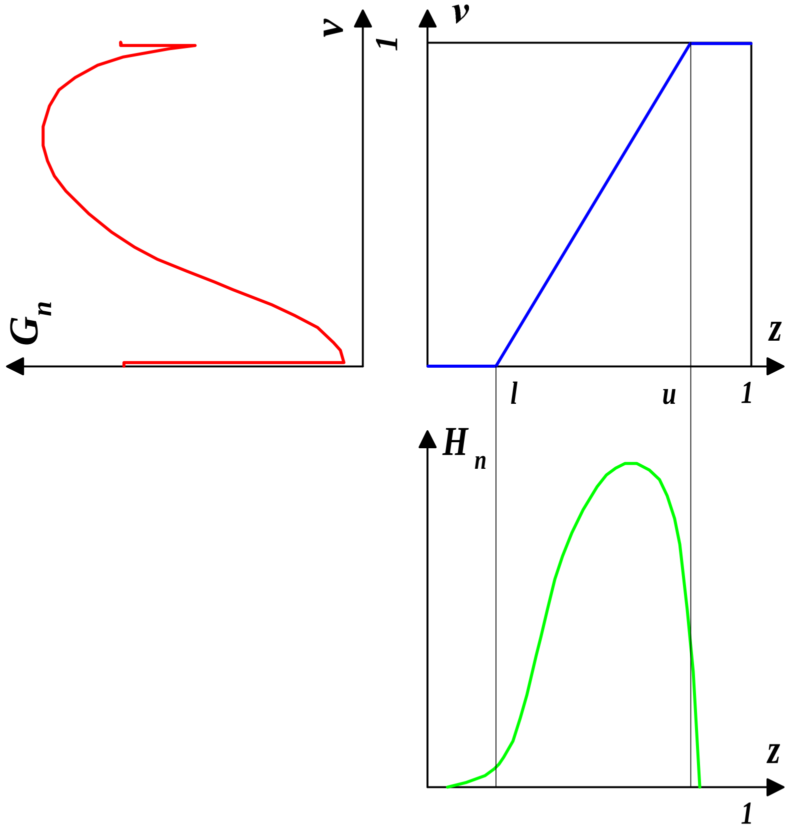
$$T(z) = 1 - z$$

# Rozciąganie histogramu (*stretching*)



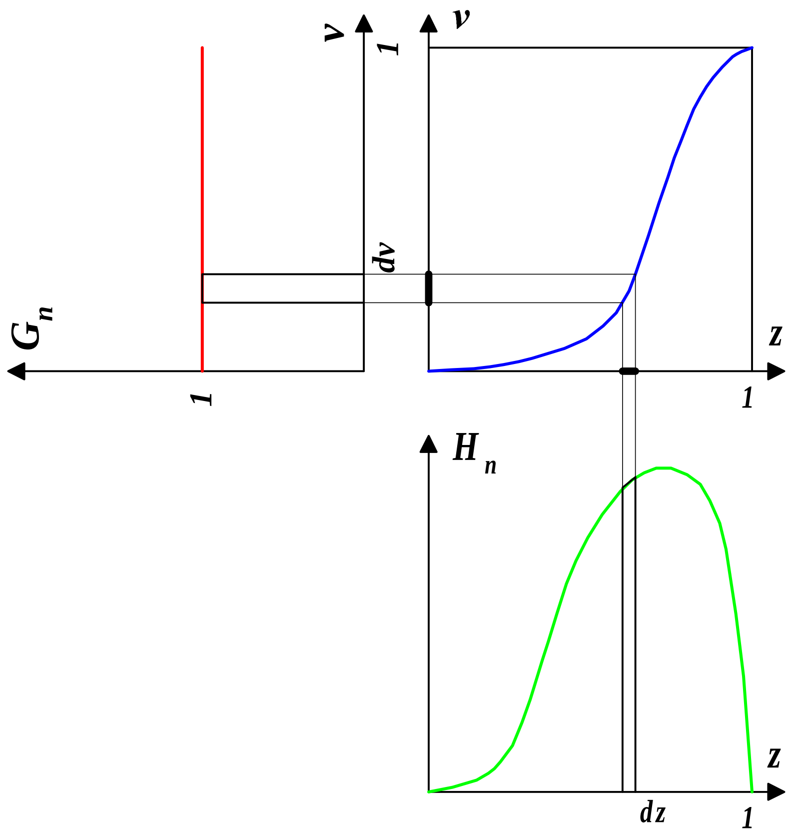

$$T(z) = \begin{cases} 0 & gdy \quad z \le l \\ \frac{z-l}{u-l} & gdy \quad l \le z \le u \\ 1 & gdy \quad z \ge u \end{cases}$$

# Normalizacja histogramu




$$[l,u]:\begin{cases}\int_0^l H_n(z)dz=\varepsilon_l\\ \int_u^1 H_n(z)dz=\varepsilon_u\end{cases}$$

# Wyrównywanie histogramu (*equalization*)




$$v = T(z) = \int_0^z H_n(w)dw \quad dla \quad 0 \le z \le 1$$

$$dv = H_n(z)dz$$

$$G_n(v)dv = [H_n(z)dz]_{z=T^{-1}(v)} = dv$$

# Wyrównywanie histogramu w przypadku dyskretnym

$$H_n(q_k) = \frac{n_k}{n}, \quad 0 \leq z_k \leq 1, \quad k = 0..K-1$$

$K$ – ilość poziomów kwantyzacji,

$n_k$ – ilość punktów o jasności $q_k$,

$n$ – ilość wszystkich punktów obrazu.

Dystrybuanta rozkładu dyskretnego $H_n(q_k)$:

$$v_k = T(q_k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_j}{n} = \sum_{j=0}^{k} H_n(q_j)$$

dla

$$0 \leq q_k \leq 1, \quad k = 0..K-1$$

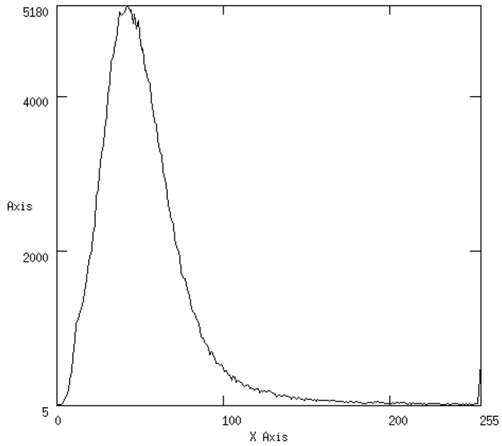
# Przykładowy wynik dyskretnego wyrównywania histogramu (Gonzales, Wintz)

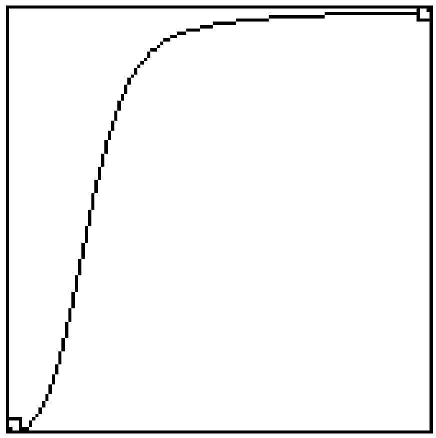
Obraz o ośmiu stopniach szarości i rozmiarach $64 \times 64$:

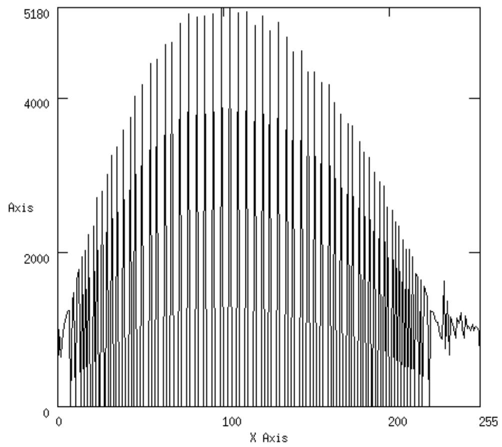
$K = 8$, $n = 4096$

| $q_k$ | $n_k$ | $H(q_k) = \frac{n_k}{n}$ | $w_k = \sum_{j=0}^{k} H(q_k)$ | $v_k = w_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 790 | 0.19 | 0.19 | $\frac{1}{7}$ |
| $\frac{1}{7}$ | 1023 | 0.25 | 0.44 | $\frac{3}{7}$ |
| $\frac{2}{7}$ | 850 | 0.21 | 0.65 | $\frac{5}{7}$ |
| $\frac{3}{7}$ | 656 | 0.16 | 0.81 | $\frac{6}{7}$ |
| $\frac{4}{7}$ | 329 | 0.08 | 0.89 | $\frac{6}{7}$ |
| $\frac{5}{7}$ | 245 | 0.06 | 0.95 | 1 |
| $\frac{6}{7}$ | 122 | 0.03 | 0.98 | 1 |
| 1 | 81 | 0.02 | 1.00 | 1 |

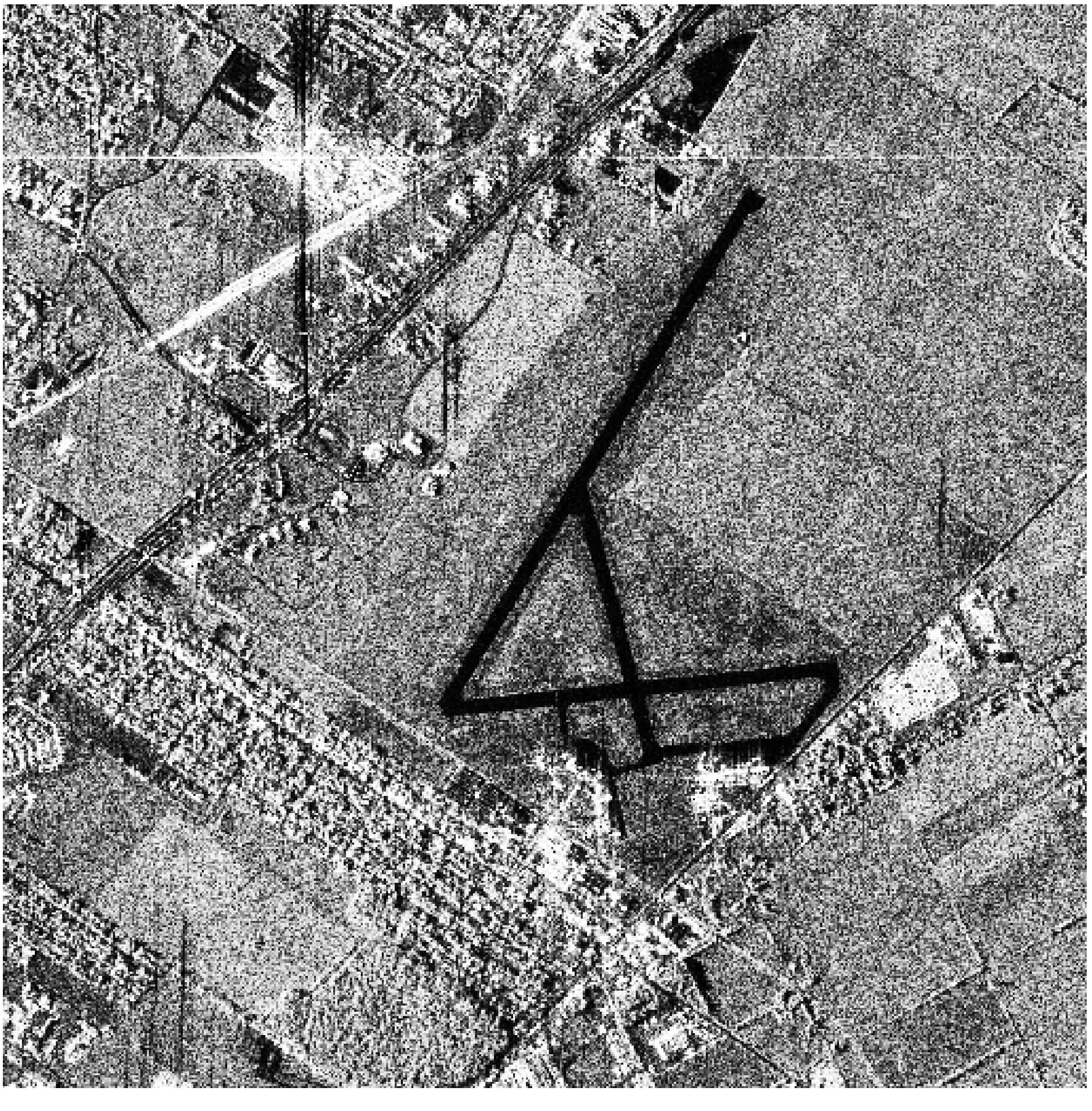
# Przykład: obraz przed wyrównaniem histogramu


5180
4000
Axis
2000
5
0
100
200
255
X Axis




5180
4000
Axis
2000
0
0
100
200
255
X Axis

# Przykład: obraz po wyrównaniu histogramu



# Histogram dwuwymiarowy

$$\begin{aligned} f &: X \times Y \to Z \\ g &: X \times Y \to V \\ f^{-1} &: Z \to \mathbf{2}^{X \times Y} \\ g^{-1} &: V \to \mathbf{2}^{X \times Y} \\ f^{-1}(z) &= \{(x,y) | f(x,y) = z\} \\ g^{-1}(v) &= \{(x,y) | g(x,y) = v\} \end{aligned}$$

$$H_{fg}(z,v) = \int (\chi_{f^{-1}(z)} \cap \chi_{g^{-1}(v)}) dxdy$$

# Macierz sąsiedztwa

$$C_r(z,v) = card\{(x,y) | \exists(\xi,\psi) \quad ((x,y) r (\xi,\psi) \\ \wedge f(x,y) = z \\ \wedge f(\xi,\psi) = v\}$$

$$r \subset (X \times Y) \times (X \times Y)$$

Przykład dla sąsiedztwa prawostronnego:

$$r = \{((x,y),(x+1,y))\}$$

$$C_r(z,v) = H_{fg}(z,v)$$
$$g(x,y) = f(x+1,y)$$

# Przykład numeryczny

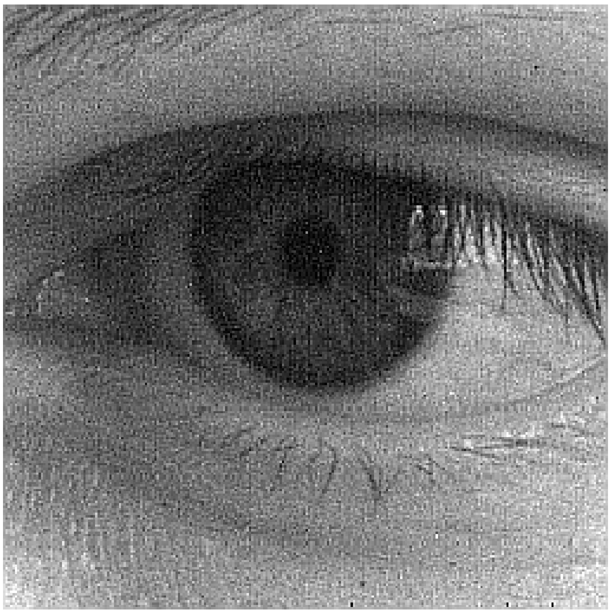
| obraz 1 | | | | z | H(z) | | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| obraz 2 | | | | z | H(z) | | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 7 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 5 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Duże wyrazy Cr skupione w pobliżu przekątnej oznaczają, że w sąsiedztwie punktów o danej jasności są przeważnie punkty o jasnościach zbliżonych (obraz 1), co oznacza wolnozmienność jasności i małą ilość drobnych szczegółów.

Oddalenie dużych wyrazów Cr od przekątnej (obraz 2) wiąże się z występowaniem dużej ilości gwałtownych zmian jasności (krawędzi, drobnych szczegółów).

# Ilustracja własności macierzy sąsiedztwa



obraz ostry

obraz nieostry