

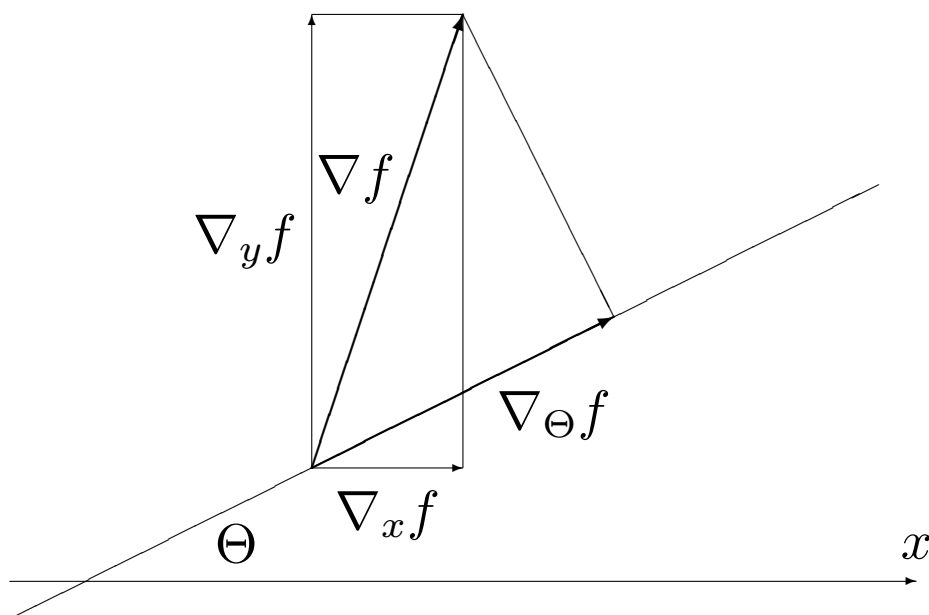
Lokalne operatory wykrywania krawędzi (*local edge detectors*)

”Jeśli dwie reprezentacje są zbyt odległe, by można było łatwo określić transformację między nimi, to ułatwić zadanie można przez wprowadzenie reprezentacji pośredniej.”

- aproksymacja gradientu funkcji obrazu (jasności)
- przykładanie szablonów (*template matching*)
- dopasowywanie lokalnych modeli
- rozkład na kształty elementarne

Operatory gradientowe

Szybkość zmian funkcji obrazu w dowolnym kierunku Θ jest dana przez pochodną kierunkową:



$$\nabla_x f = \frac{\partial f}{\partial x} ; \nabla_y f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\nabla_{\Theta} f = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \Theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \Theta$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{\Theta} f = (\nabla f, \mathbf{1}_{\Theta}) = (\nabla f)^T \mathbf{1}_{\Theta}$$

$$\Theta_{max} = \arctan \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

Moduł gradientu (norma euklidesowa) wynosi:

$$|\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}$$

Inne normy, nie wymagające pierwiastkowania:

- taksówkowa (Manhattan): $|\nabla_x f| + |\nabla_y f|$
- maksimum: $\max\{|\nabla_x f|, |\nabla_y f|\}$

nie dają wyniku niezależnego od orientacji gradientu (są wrażliwe na obrót układu współrzędnych). Największe odchylenia powstają przy obrocie o $\frac{\pi}{4}$.

Dyskretna realizacja gradientu

$$\nabla_x f(i, j) = f(i, j) - f(i - 1, j)$$

$$\nabla_y f(i, j) = f(i, j) - f(i, j - 1)$$

$$\nabla_{\Theta} f(i, j) = \nabla_x f(i, j) \cos \Theta + \nabla_y f(i, j) \sin \Theta$$

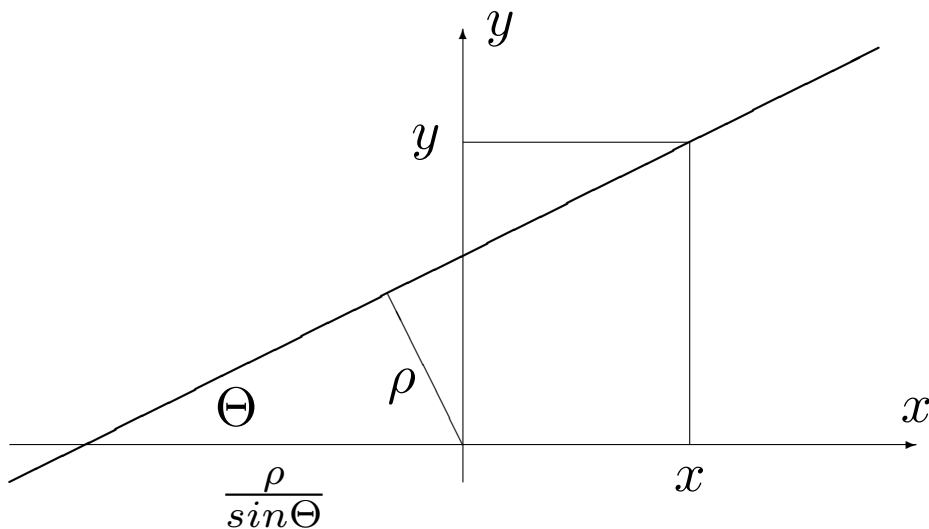
$$\sqrt{(\nabla_x f(i, j))^2 + (\nabla_y f(i, j))^2}$$

Liniowe filtry lokalne realizujące składowe gradientu (operatorzy Roberts-a):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wrażliwość na kierunek krawędzi

Prosta przebiegająca pod kątem Θ do osi x i odległa od początku układu o ρ :



$$\frac{x + \frac{\rho}{\sin\Theta}}{y} = \frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}$$

jest dana równaniem uwikłanym:

$$x \sin\Theta - y \cos\Theta + \rho = 0$$

Obraz idealnej krawędzi

Niech jasność obrazu ma postać:

$$f(x, y) = z_1 + (z_2 - z_1)u(x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho),$$

gdzie:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow t > 0 \\ \frac{1}{2} & \Leftarrow t = 0 \\ 0 & \Leftarrow t < 0 \end{cases}$$

jest całką jednowymiarowej delty Dirac'a:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.$$

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin \Theta (z_2 - z_1) \delta(x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos \Theta (z_2 - z_1) \delta(x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho)$$

Operatory niezależne od kierunku

Kwadrat skalarny (kwadrat modułu) gradientu:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = ((z_2 - z_1)\delta(x\sin\Theta - y\cos\Theta + \rho))^2$$

Laplasjan:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sin^2\Theta(z_2 - z_1)\delta'(x\sin\Theta - y\cos\Theta + \rho)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cos^2\Theta(z_2 - z_1)\delta'(x\sin\Theta - y\cos\Theta + \rho)$$

gdzie δ' jest wynikiem różniczkowania impulsu jednostkowego (delty Dirac'a).

$$\nabla^2 f = (z_2 - z_1)\delta'(x\sin\Theta - y\cos\Theta + \rho)$$

Dyskretna realizacja Laplasjanu (1)

$$\begin{aligned}\nabla_x^2 f(i, j) &= \nabla_x f(i+1, j) - \nabla_x f(i, j) = \\ &= f(i+1, j) + f(i-1, j) - 2f(i, j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_y^2 f(i, j) &= \nabla_y f(i, j+1) - \nabla_y f(i, j) = \\ &= f(i, j+1) + f(i, j-1) - 2f(i, j)\end{aligned}$$

$$\nabla_+^2 f(i, j) = f(i, j+1) + f(i, j-1) + f(i+1, j) + f(i-1, j) - 4f(i, j)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wada: wrażliwość na obrót układu współrzędnych (zwłaszcza dla x' i y' - układu obróconego o $\frac{\pi}{4}$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = \frac{1}{2}(f(i+1, j+1) - 2f(i, j) + f(i-1, j-1))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{2}(f(i-1, j+1) - 2f(i, j) + f(i+1, j-1))$$

Dyskretna realizacja Laplasjanu (2)

$$\nabla_{\times}^2 f = \frac{1}{2}(f(i+1, j+1) + f(i-1, j-1) + f(i-1, j+1) + f(i+1, j-1) - 4f(i, j))$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kombinacja wypukła obu powyższych transformacji:

$$\nabla_o^2 = \frac{2}{3}\nabla_+^2 + \frac{1}{3}\nabla_{\times}^2$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

jest w bardzo małym stopniu zależna od kierunku:

$$\nabla_o^2 = \nabla^2 + \frac{1}{12}\nabla^2(\nabla^2) + \varepsilon$$

(ε zawiera pochodne rzędu nie mniejszego od 6)

Dopasowywanie lokalnych modeli (1)

Rozważmy liniową aproksymację f :

$$\bar{f} = ai + bj + c$$

na podstawie czterech sąsiadujących ze sobą punktów:

$$\begin{array}{cc} f(i-1, j-1) & f(i, j-1) \\ f(i-1, j) & f(i, j) \end{array}$$

optymalną w sensie minimalnego błędu średniokwadratowego:

$$\begin{aligned} Q = & (a(i-1) + b(j-1) + c - f(i-1, j-1))^2 + \\ & +(ai + b(j-1) + c - f(i, j-1))^2 + \\ & +(a(i-1) + bj + c - f(i-1, j))^2 + \\ & +(ai + bj + c - f(i, j))^2 \end{aligned}$$

Dopasowywanie lokalnych modeli (2)

Optymalne współczynniki funkcji liniowej:

$$a = \frac{1}{2}(f(i, j - 1) + f(i, j) - f(i - 1, j - 1) - f(i - 1, j))$$

$$b = \frac{1}{2}(f(i - 1, j) + f(i, j) - f(i - 1, j - 1) - f(i, j - 1))$$

Gradient optymalnej liniowej aproksymacji:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Odpowiednie operatory lokalne:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

są podobne do operatora Roberts'a z dokładnością do uśrednienia odpowiednio w pionie i w poziomie.

Szablony (*templates*)

Przykład 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

...

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Przykład 2:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 \\ -3 & 0 & -5 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

...

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Rozkład na kształty lokalne

Składowe ortogonalne, reprezentujące określone cechy i rozpinające lokalnie całą przestrzeń (Frei i Chen) :

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \quad (h_1, h_1) = 8$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (h_2, h_2) = 8$$

$$h_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (h_3, h_3) = 8$$

$$h_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (h_4, h_4) = 8$$

$$h_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (h_5, h_5) = 4$$

$$h_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (h_6, h_6) = 4$$

$$h_7 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (h_7, h_7) = 36$$

$$h_8 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (h_8, h_8) = 36$$

$$h_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (h_9, h_9) = 9$$

Reprezentacja obrazu w bazie Chen-a

W ósmiospójnym otoczeniu punktu (x, y) funkcję obrazu f można traktować jako dziewięciowymiarowy wektor:

$$\mathbf{f}_8(x, y) \in \mathbb{R}^9$$

o składowych równych wartościom f w poszczególnych punktach tego otoczenia. Jego reprezentacja w bazie h_i :

$$\mathbf{f}_8(x, y) = \sum_{i=1}^9 a_i h_i$$

ma składowe:

$$a_i = \frac{(\mathbf{f}_8(x, y), h_i)}{(h_i, h_i)}$$

Wykrywanie krawędzi

Podprzestrzeń "krawędziowa" rozpięta przez h_1 i h_2 :

$$E = \text{span}\{h_1, h_2\}$$

Kryterium przyjęcia punktu (x, y) za element krawędzi – kąt pomiędzy wektorem $\mathbf{f}_8(x, y)$ a podprzestrzenią E .

$$|\mathbf{f}_E| = \sqrt{(\mathbf{f}_8, h_1)^2 + (\mathbf{f}_8, h_2)^2}$$

$$|\mathbf{f}_N| = \sqrt{\sum_{i=3}^9 (\mathbf{f}_8, h_i)^2}$$

$$\Theta = \arctan \frac{|\mathbf{f}_N|}{|\mathbf{f}_E|}$$

Można założyć wartość progową tego kąta, poniżej której uznamy zasadność przyjęcia (x, y) jako elementu krawędzi.