

Podstawowe człony dynamiczne

- modele matematyczne
- charakterystyki czasowe
- charakterystyki częstotliwościowe
- przykłady realizacji

Podstawowe człony dynamiczne

Człony:

proporcjonalny

inercyjny pierwszego rzędu

całkujący idealny

całkujący rzeczywisty

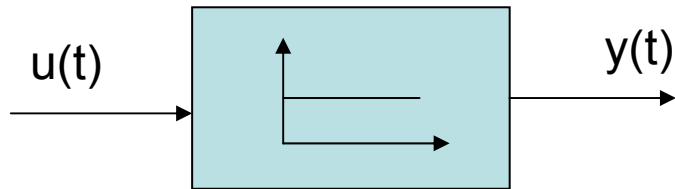
różniczkujący idealny

różniczkujący rzeczywisty

oscylacyjny

opóźniający

Człon proporcjonalny



$$y(t) = k u(t)$$

k współczynnik wzmocnienia

$$K(s) = k$$

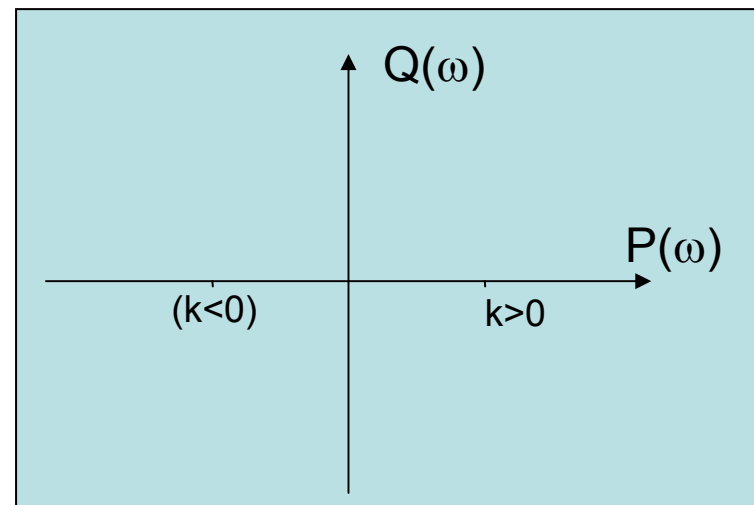
$$K(j\omega) = k$$

$$h(t) = k 1(t)$$

charakterystyka skokowa

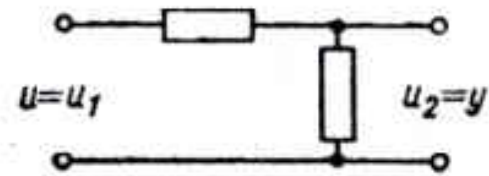
$$k(t) = k \delta(t)$$

charakterystyka impulsowa



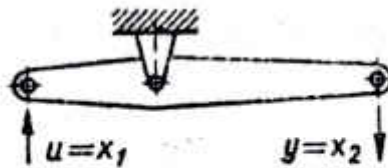
Przykłady realizacji

dzielnik napięcia



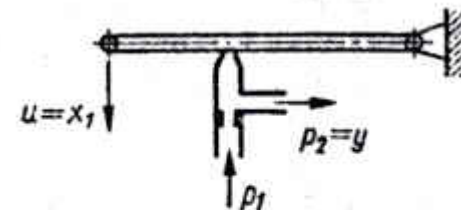
napięcia elektryczne

dźwignia



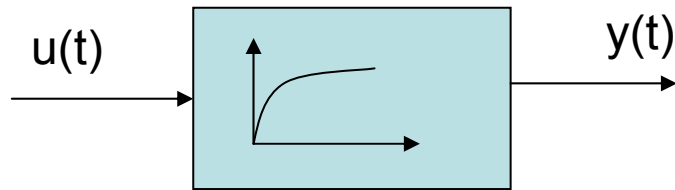
przesunięcia

układ pneumatyczny



przesunięcie — ciśnienie powietrza

Człon inercyjny I rzędu



$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$$

$$K(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

k współczynnik wzmocnienia
 T stała czasowa

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

/ L

$$L\left\{T \frac{dy}{dt} + y\right\} = L\{ku(t)\}$$

$$L\left\{T \frac{dy}{dt}\right\} + L\{y\} = kL\{u(t)\}$$

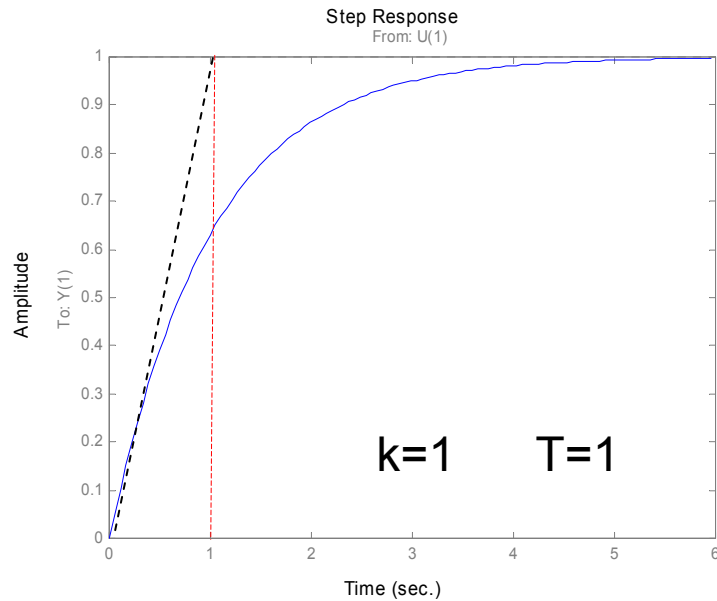
$$TL\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + L\{y\} = kL\{u(t)\}$$

$$Tsy(s) + y(s) = ku(s)$$

czyli

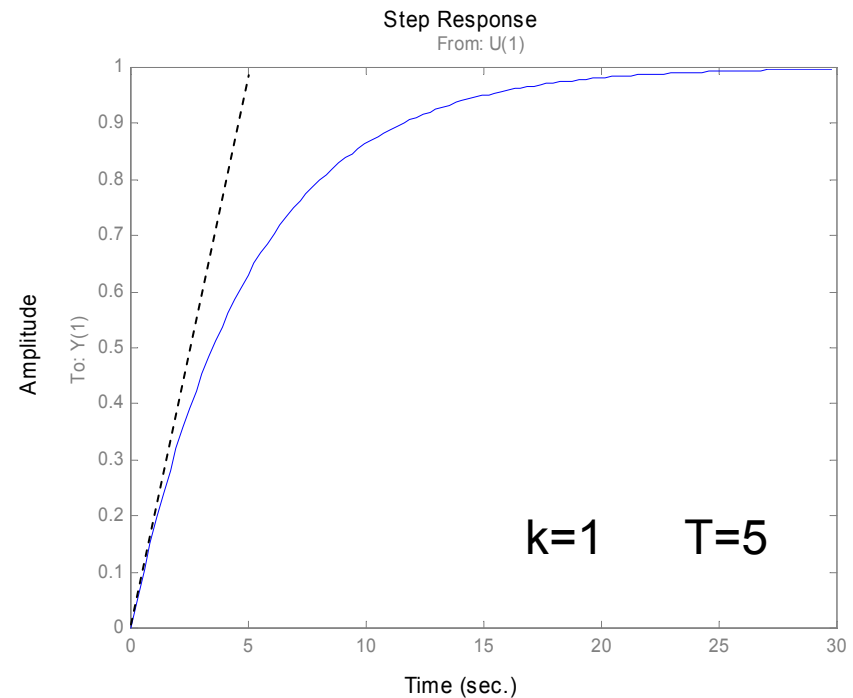
$$K(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

Człon inercyjny I rzędu – charakterystyka skokowa

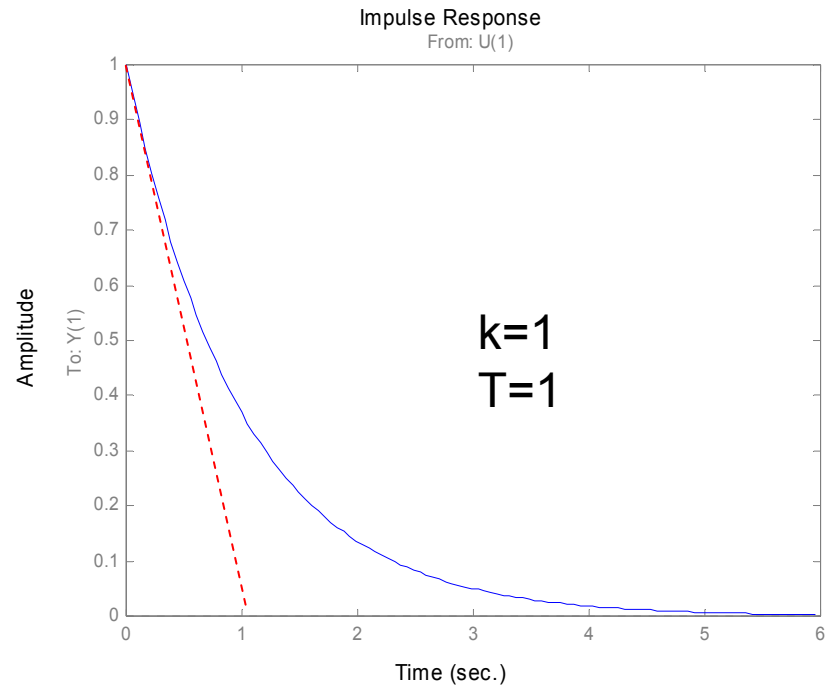


$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$$

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

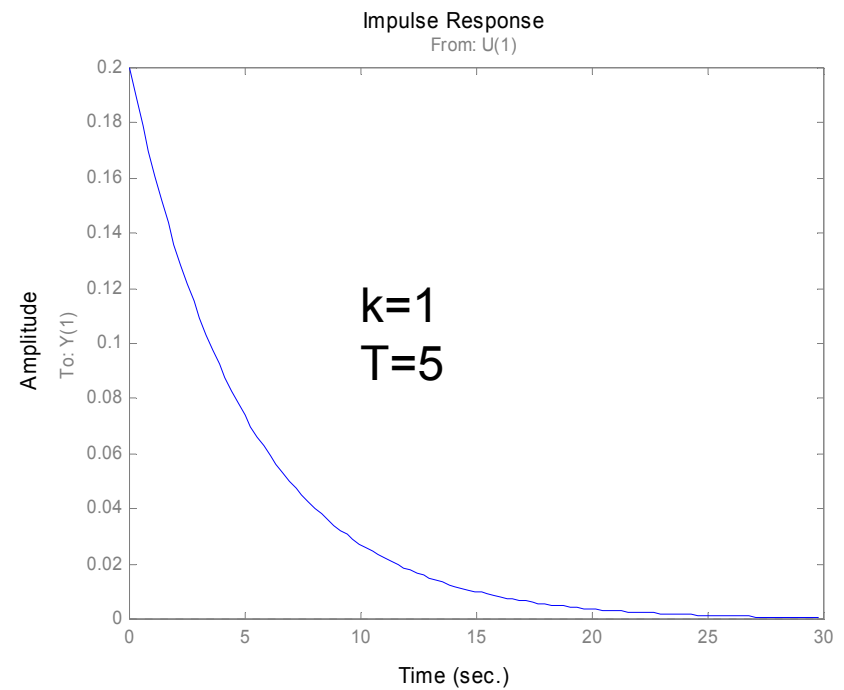


Człon inercyjny I rzędu



charakterystyka impulsowa

$$k(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



Człon inercyjny I rzędu

Transmitancja widmowa $K(j\omega)$

$$K(s) = \frac{k}{sT + 1}$$

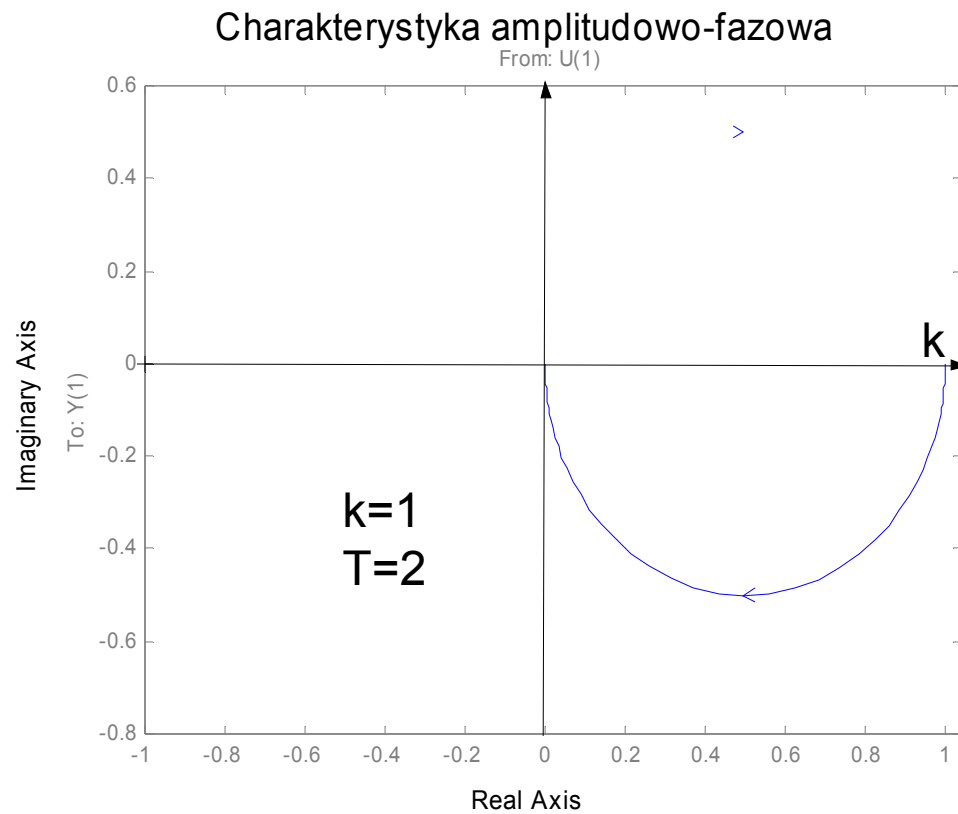
$$K(s)_{s=j\omega} = K(j\omega)$$

$$K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

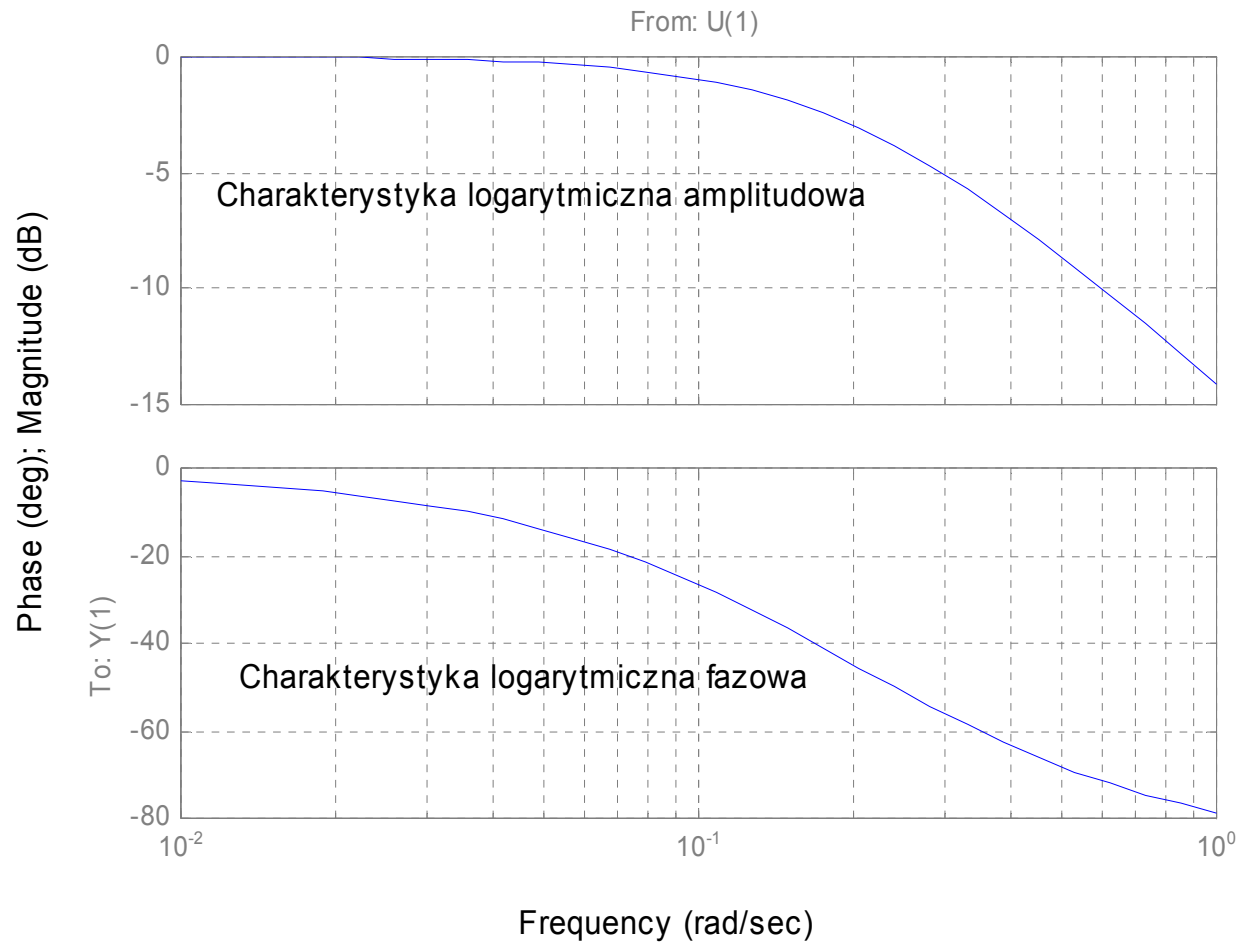
Człon inercyjny I rzędu



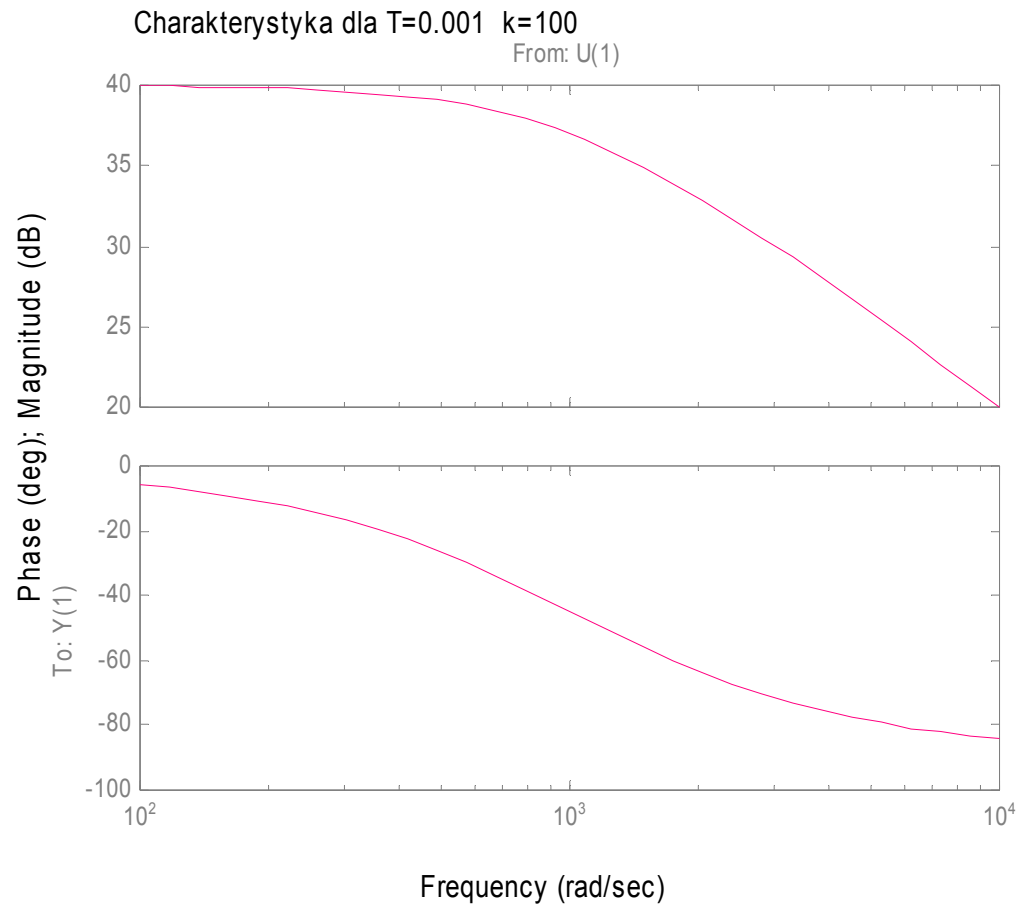
$$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Człon inercyjny I rzędu



Człon inercyjny I rzędu



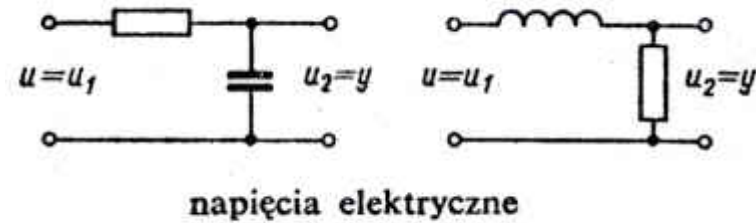
$$Lm(\omega) = 20 \lg |K(j\omega)|$$

$$Lm(\omega) = 20 \lg \frac{|k|}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

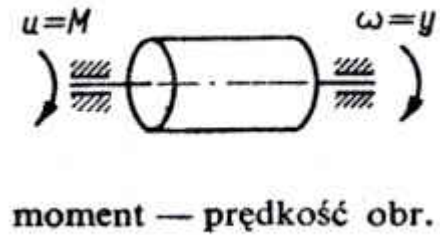
$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$$

Przykłady realizacji

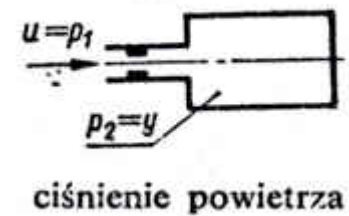
układ RC
układ LR



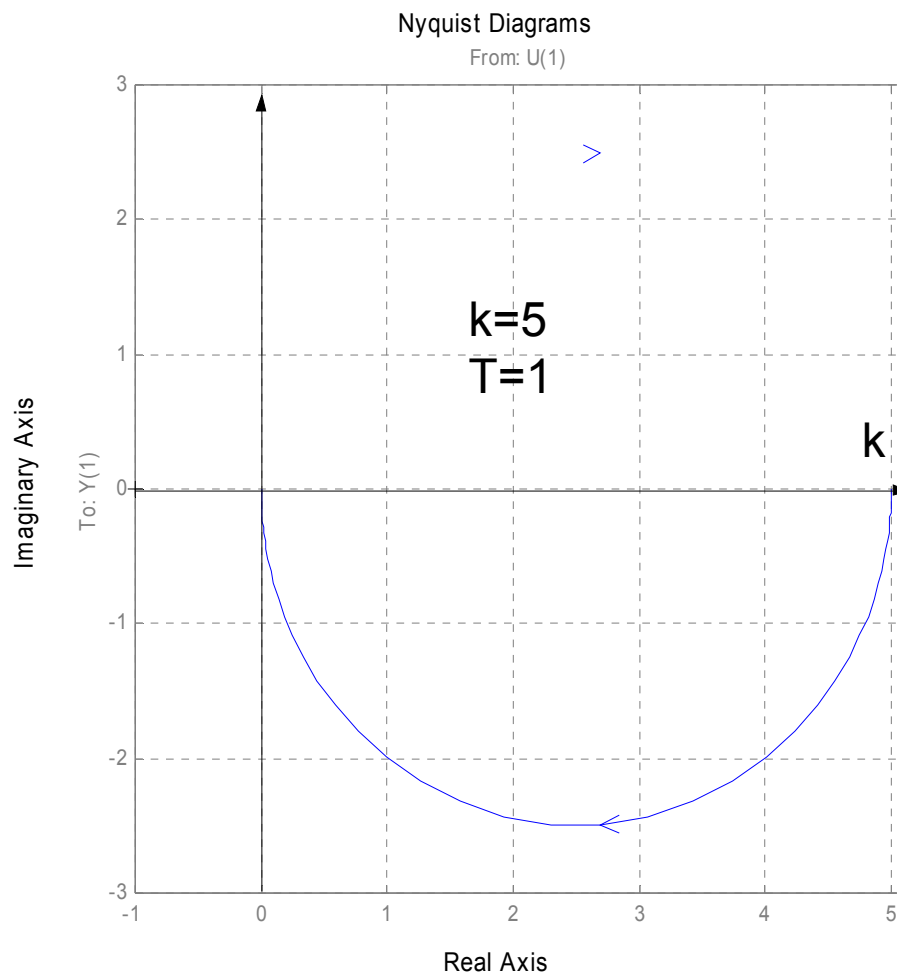
układ mechaniczny



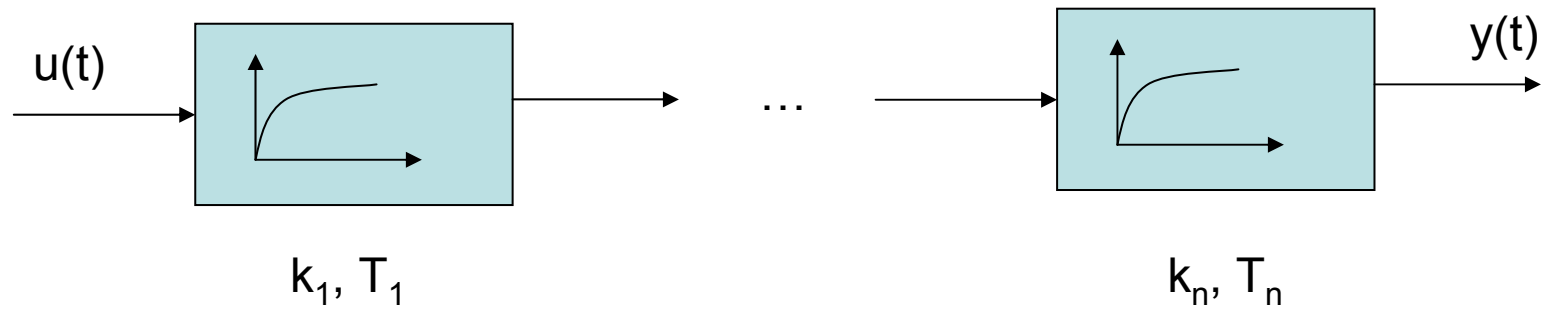
układ pneumatyczny



Człon inercyjny I rzędu



Człon inercyjny n-tego rzędu



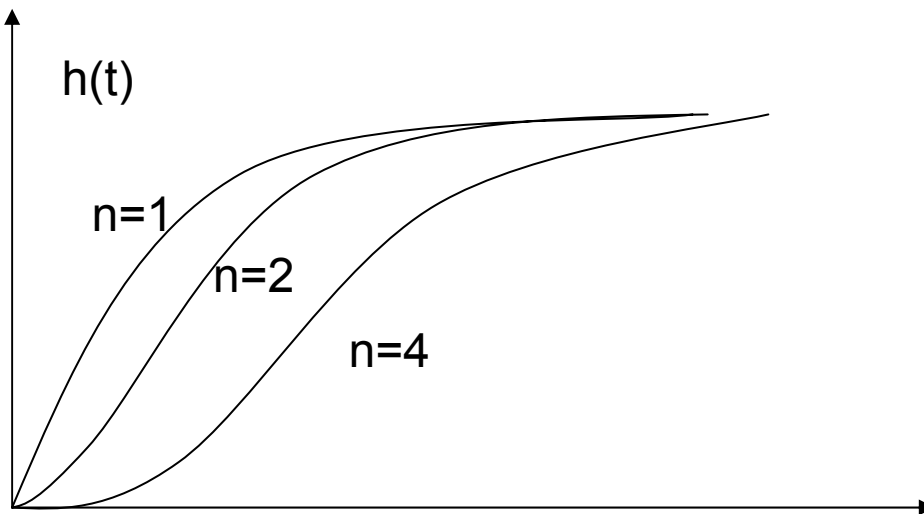
$$K(s) = \frac{k_1}{sT_1 + 1} \cdots \frac{k_n}{sT_n + 1}$$

$$K(s) = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{k_i}{sT_i + 1}$$

Człon inercyjny n-tego rzędu

$$K(s) = \frac{k_1}{sT_1 + 1} \cdots \frac{k_n}{sT_n + 1}$$

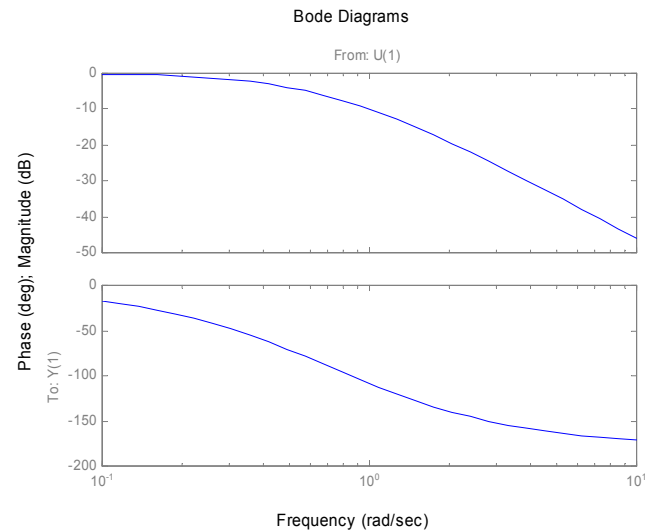
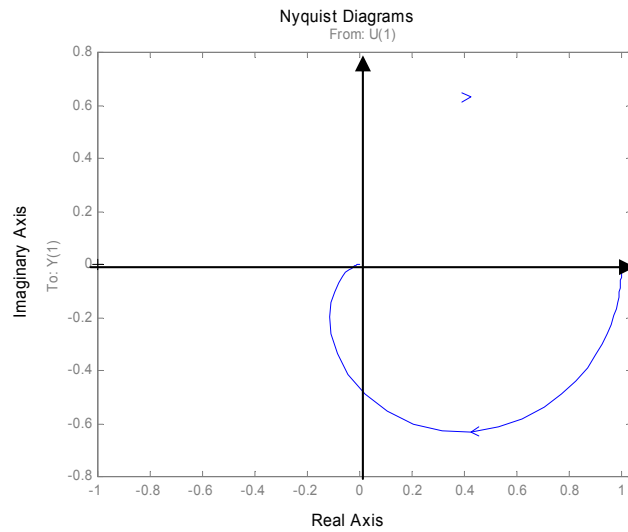
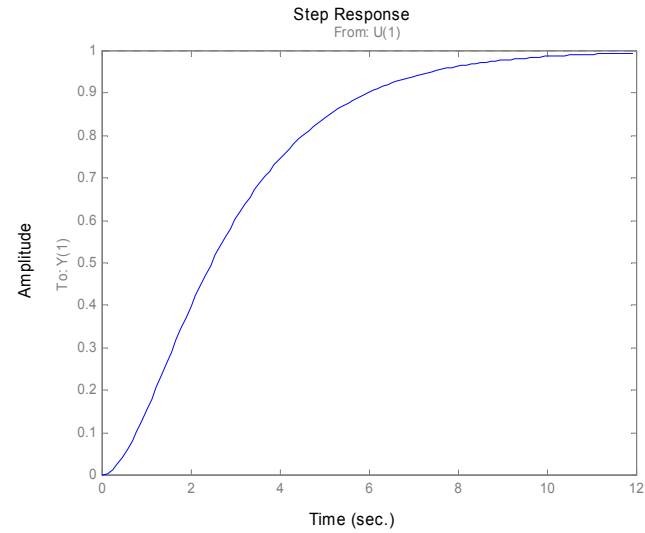
$$K(s) = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{k_i}{sT_i + 1}$$



Człon inercyjny n-tego rzędu

$n = 2$

$$K(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{2s+1}$$



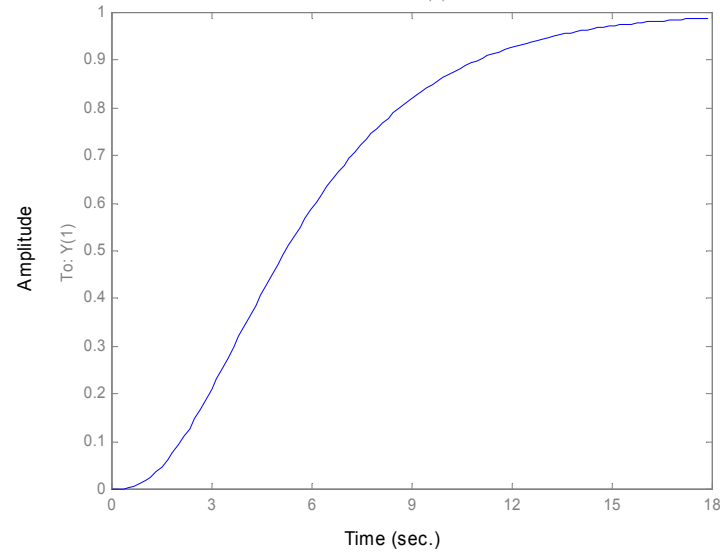
Człon inercyjny n-tego rzędu

$n = 3$

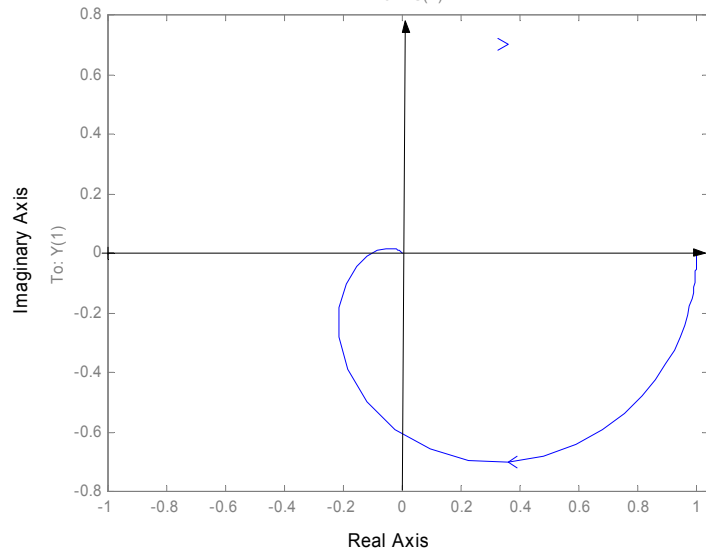
$$K(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{2s+1} \frac{1}{3s+1}$$

$$K(s) = \frac{1}{6s^3 + 11s^2 + 6s + 1}$$

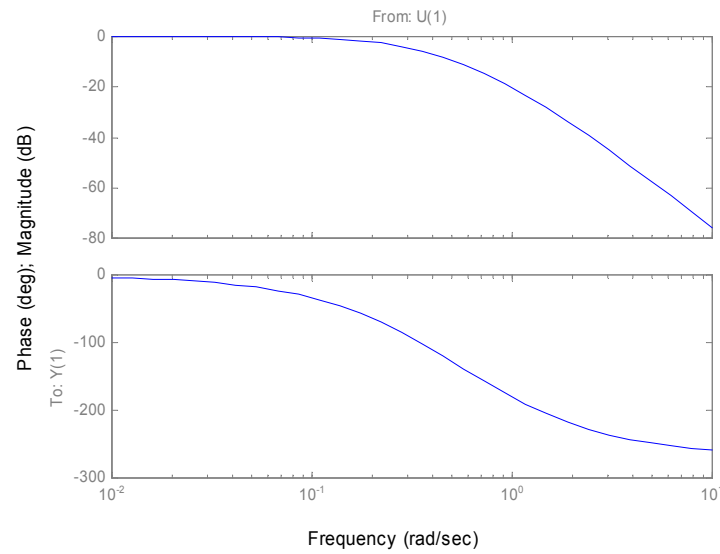
Step Response
From: U(1)



Nyquist Diagrams
From: U(1)



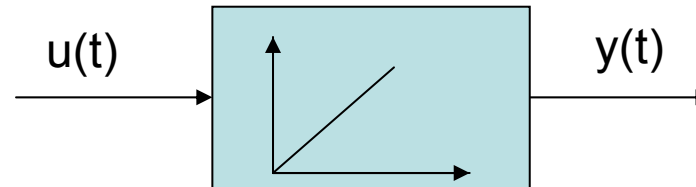
From: U(1)



Człon całkujący idealny

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t)$$

$$\text{albo } y(t) = \int_0^t ku(t)dt$$

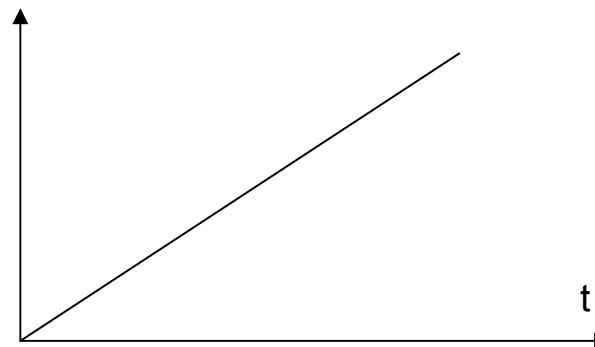


$$K(s) = \frac{k}{s}$$

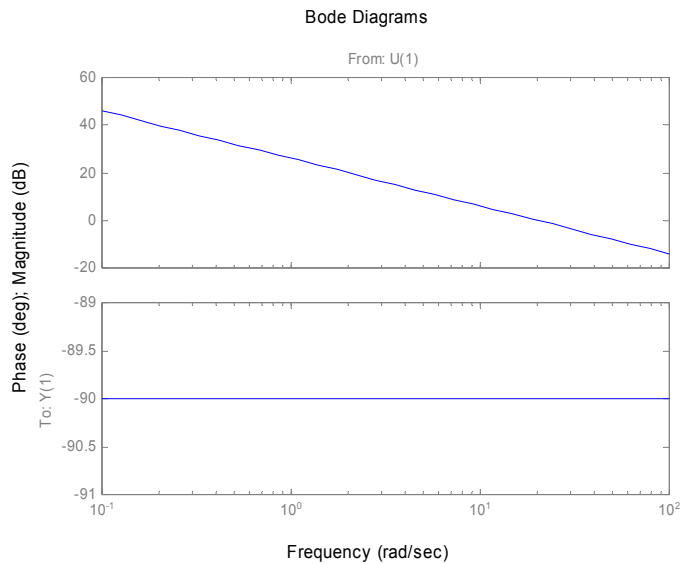
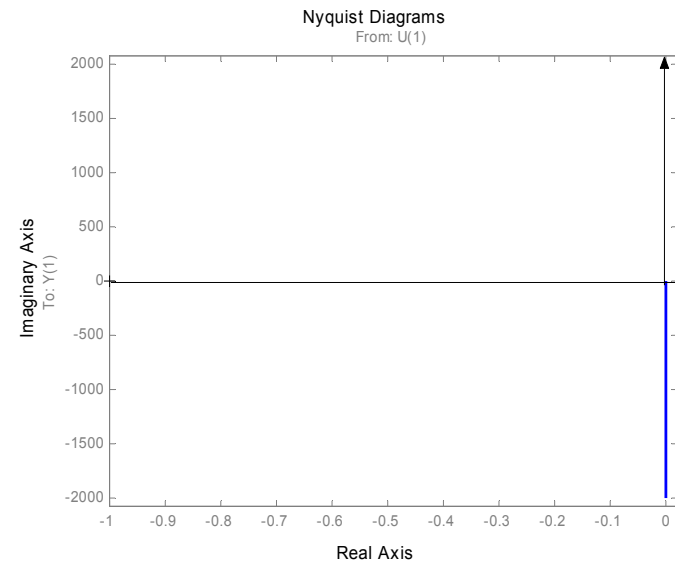
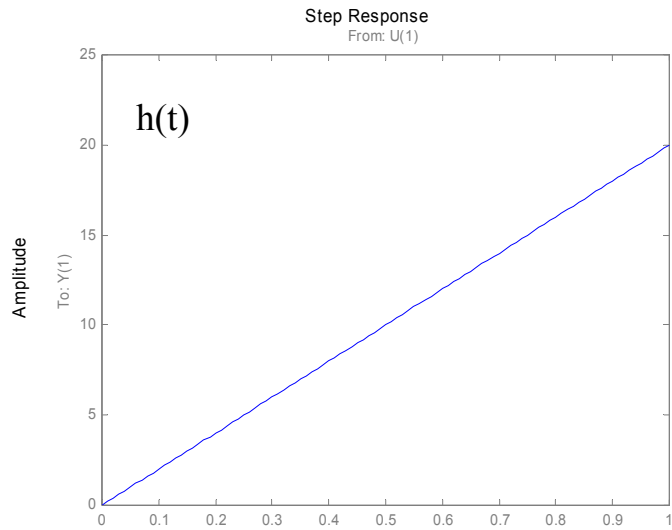
$$K(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

charakterystyka skokowa

$$h(t) = kt$$



Człon całkujący idealny

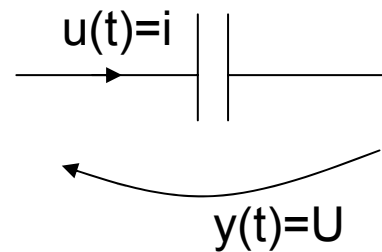


$$K(s) = \frac{20}{s}$$

Człon całkujący idealny

przykłady

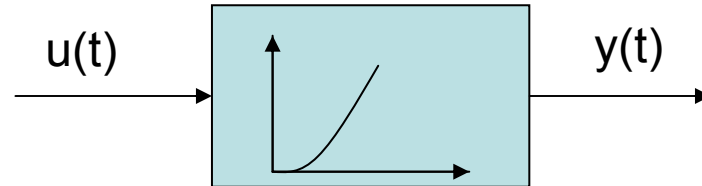
idealny kondensator



licznik odległości

$u(t)$ prędkość kątowna koła
 $y(t)$ przebyta droga

Człon całkujący rzeczywisty



$$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = ku(t)$$

$$K(s) = \frac{k}{s(1 + sT)}$$

$$K(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega T)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

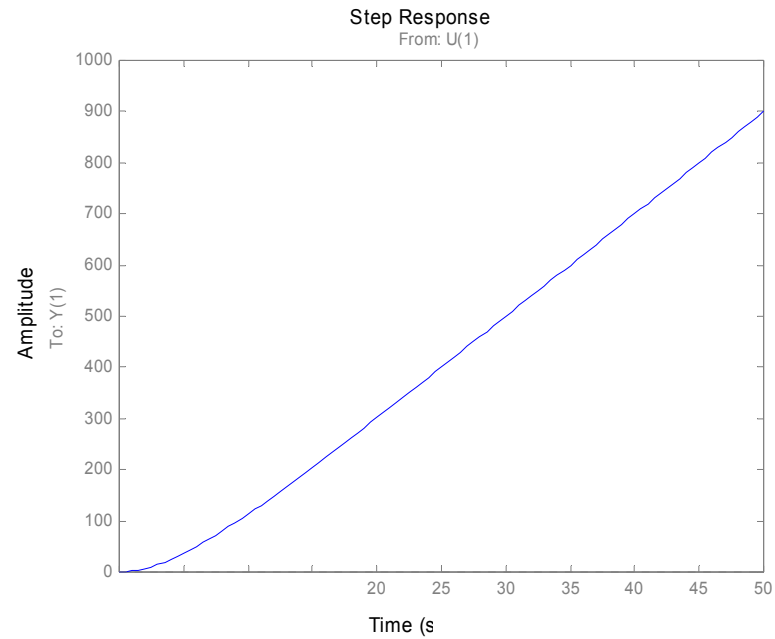
$$P(\omega) = -\frac{kT}{1 + (\omega T)^2}$$

$$Q(\omega) = -\frac{k}{\omega[1 + (\omega T)^2]}$$

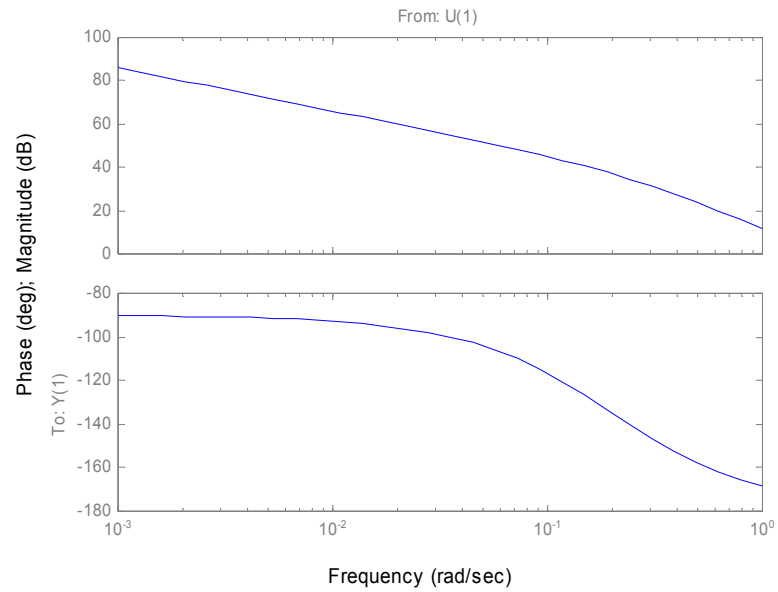
charakterystyka skokowa

$$h(t) = kt - kT(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

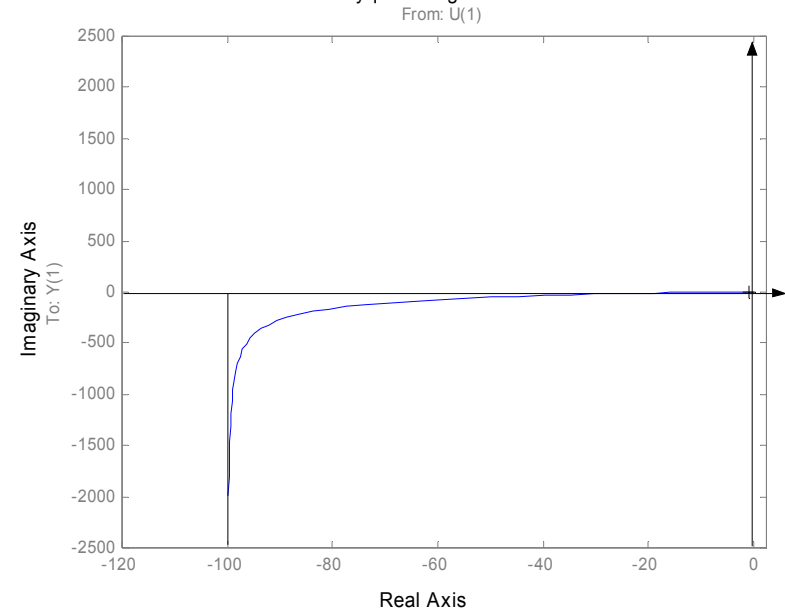
Człon całkujący rzeczywisty



Bode Diagrams



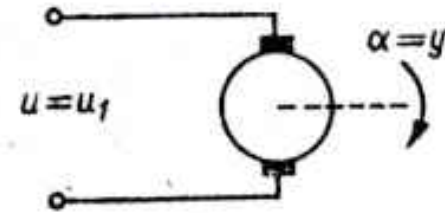
Nyquist Diagrams



Człon całkujący rzeczywisty

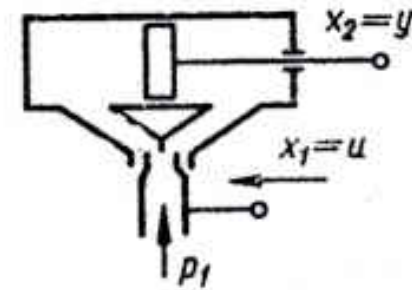
przykłady

silnik elektryczny prądu stałego



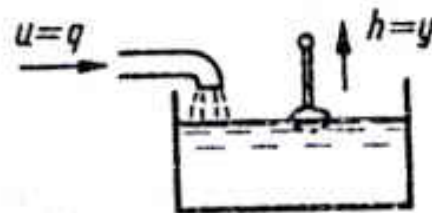
napięcie — kąt obrotu

siłownik pneumatyczny



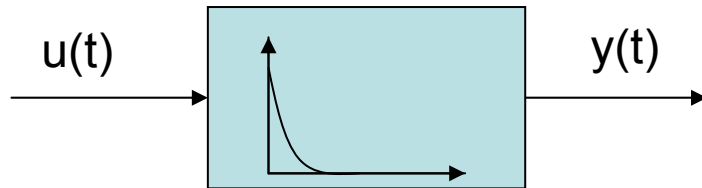
przesunięcia

zbiornik



dopływ — poziom

Człon różniczkujący rzeczywisty



$$T \frac{dy(t)}{dt} + y = k \frac{du(t)}{dt}$$

$$K(s) = \frac{ks}{1+sT}$$

$$K(j\omega) = \frac{jk\omega}{1+j\omega T} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$P(\omega) = \frac{kT\omega^2}{1+(\omega T)^2} \quad Q(\omega) = \frac{k\omega}{1+(\omega T)^2}$$

$$y(s) = K(s)u(s)$$

$$u(s) = \frac{1}{s}$$

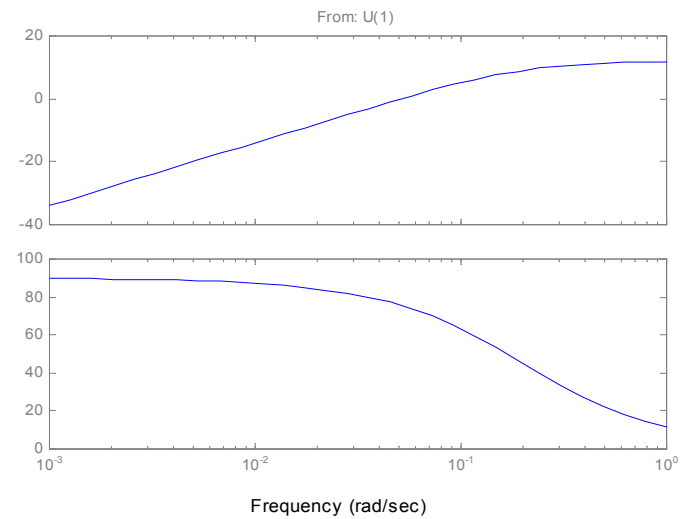
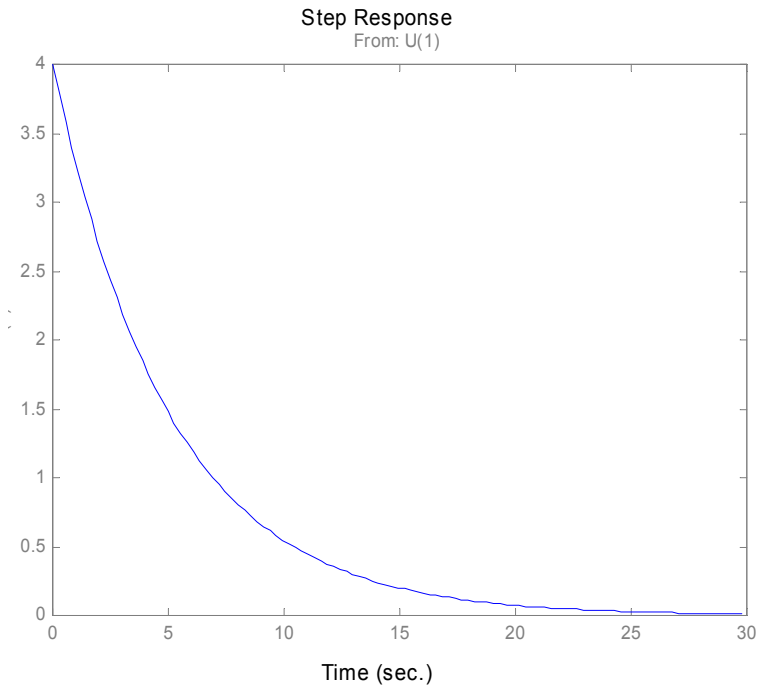
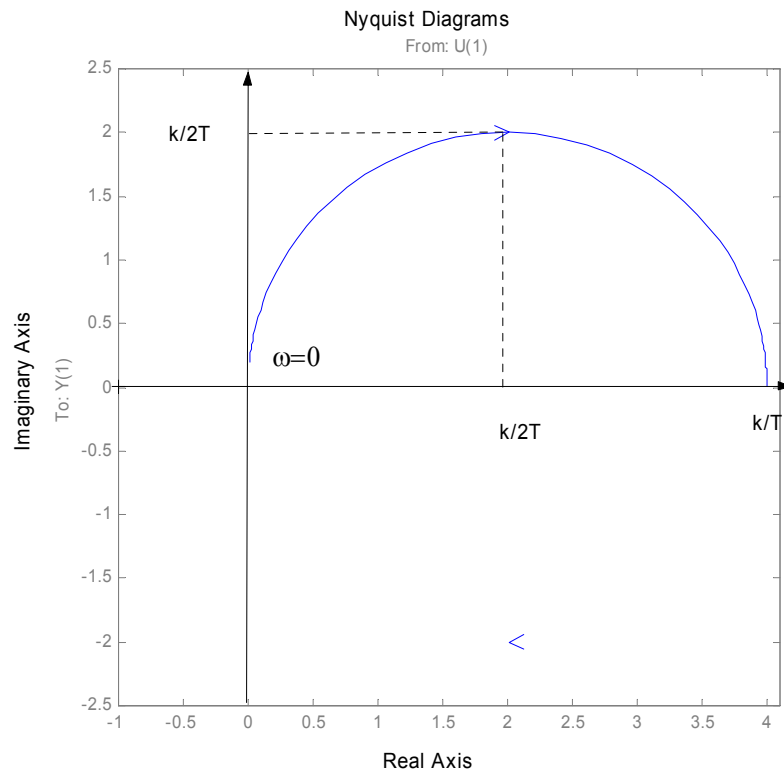
$$y(s) = \frac{ks}{1+sT} \frac{1}{s} = \frac{k}{1+sT}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{1+sT}\right\}$$

$$y(t) = h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

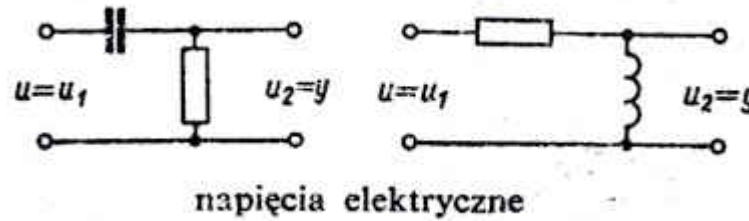
Człon różniczkujący rzeczywisty

$$K(s) = \frac{ks}{1 + sT}$$

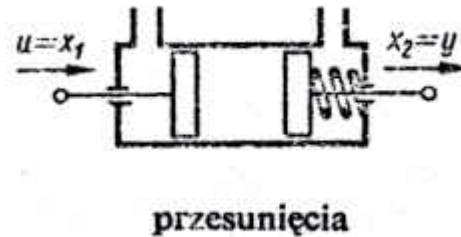


Człon różniczkujący rzeczywisty

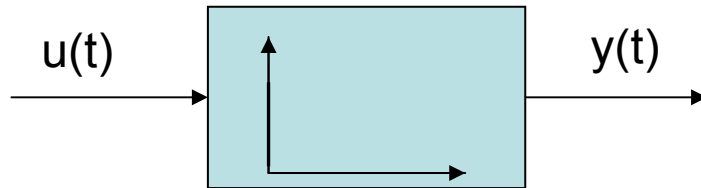
układ CR
układ RL



układ pneumatyczny



Człon różniczkujący idealny



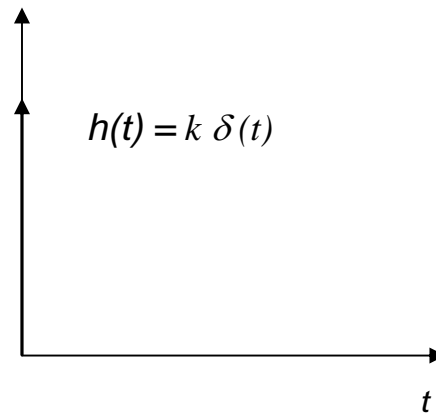
$$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

$$K(s) = ks$$

$$K(j\omega) = j\omega k$$

gdy $u(t) = 1(t)$ to

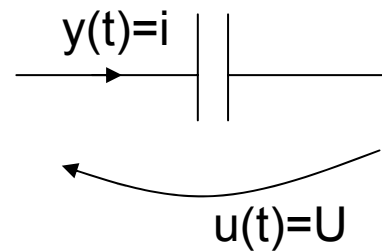
$$h(t) = k\delta(t)$$



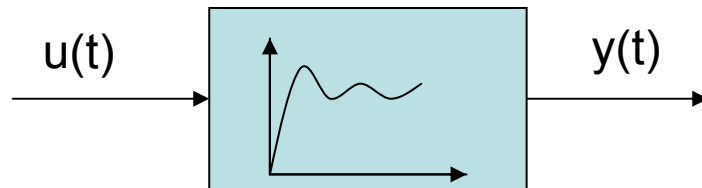
Człon różniczkujący idealny

przykład

idealny kondensator



Człon oscylacyjny



$$T_n^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta T_n \frac{dy}{dt} + y = ku$$

lub

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = k\omega_n^2 u$$

$$K(s) = \frac{k}{T_n^2 s^2 + 2\zeta T_n s + 1}$$

$$K(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- ω_n pulsacja drgań własnych nietłumionych
- T_n okres drgań własnych nietłumionych
- ζ współczynnik tłumienia względnego
- k współczynnik wzmocnienia

Człon oscylacyjny

Bieguny transmitancji, dla $0 < \zeta < 1$

czyli rozwiązania równania $M(s) = s^2 + 2s\zeta\omega_n + \omega_n^2 = 0$

są zespolone sprzężone o ujemnej części rzeczywistej: $s_1 = -\omega_n(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})$

$$s_2 = -\omega_n(\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})$$

Charakterystyka skokowa dana jest wzorem:

$$h(t) = k \left[1 - \frac{e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_w t + \varphi) \right]$$

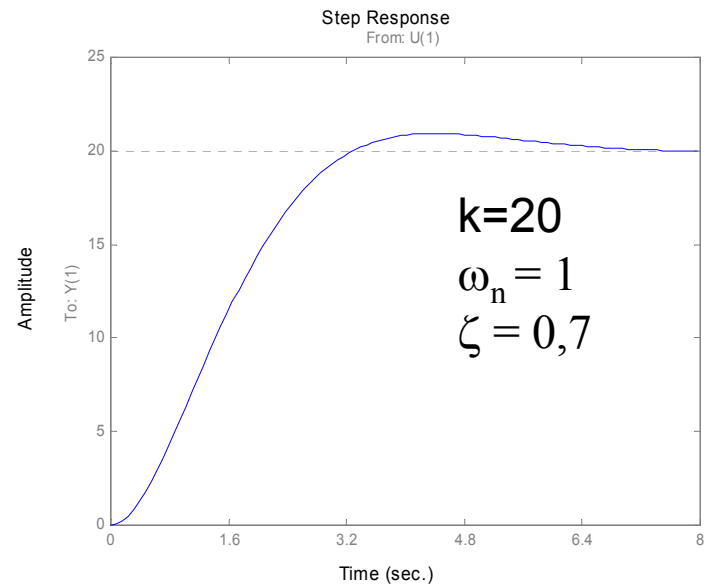
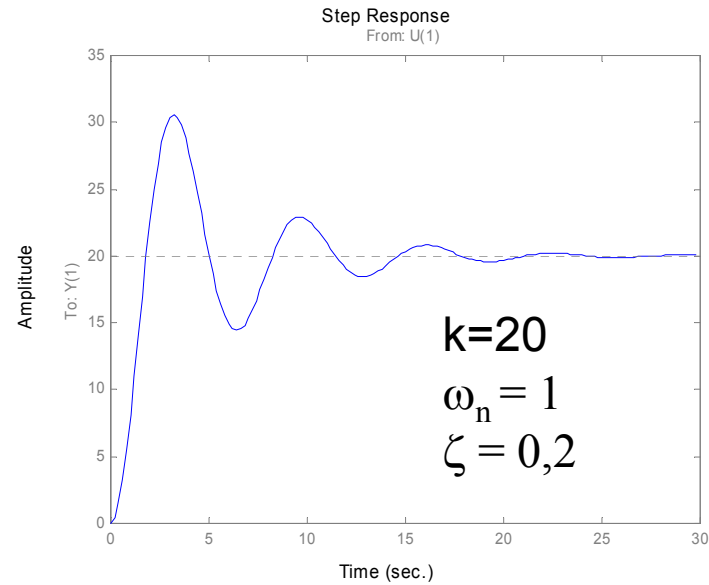
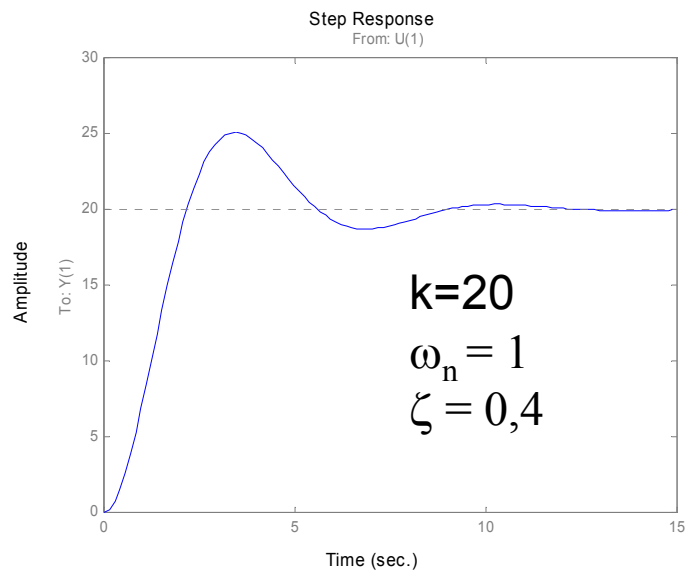
gdzie

$$\omega_w = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{pulsacja drgań własnych tłumionych}$$

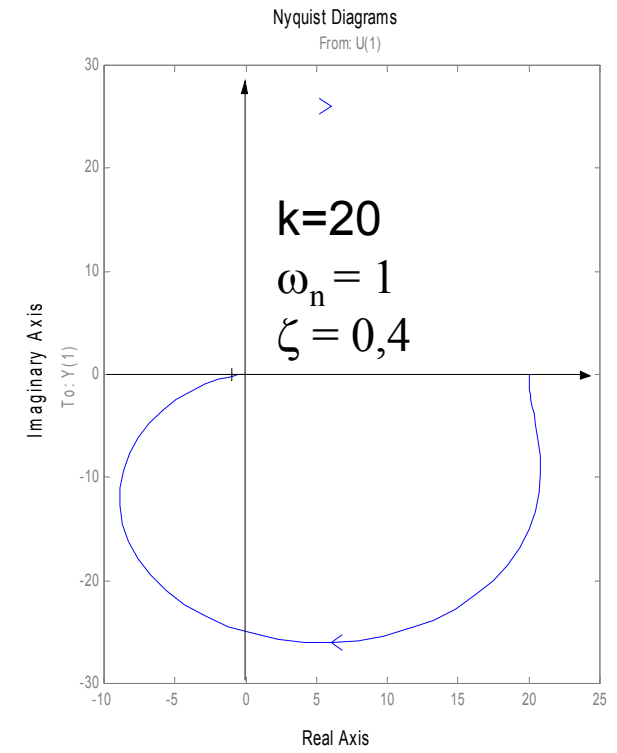
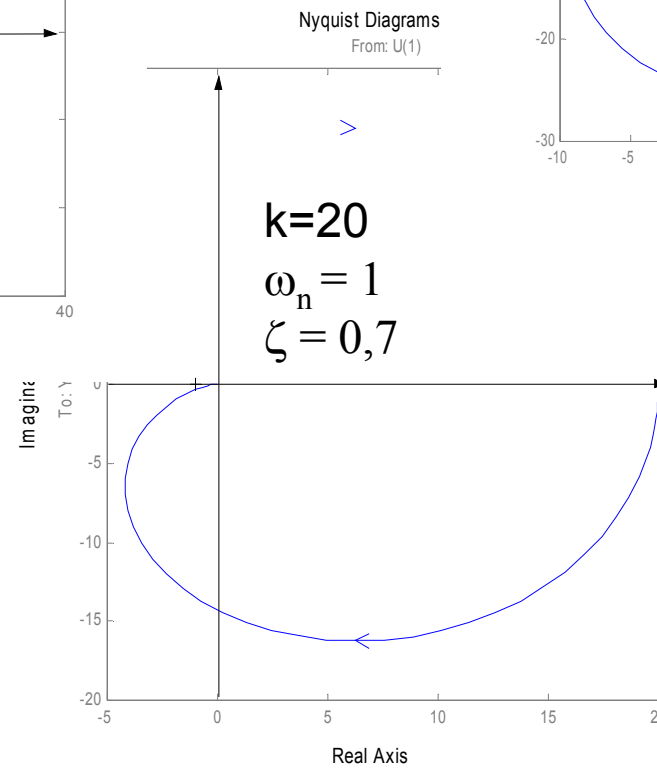
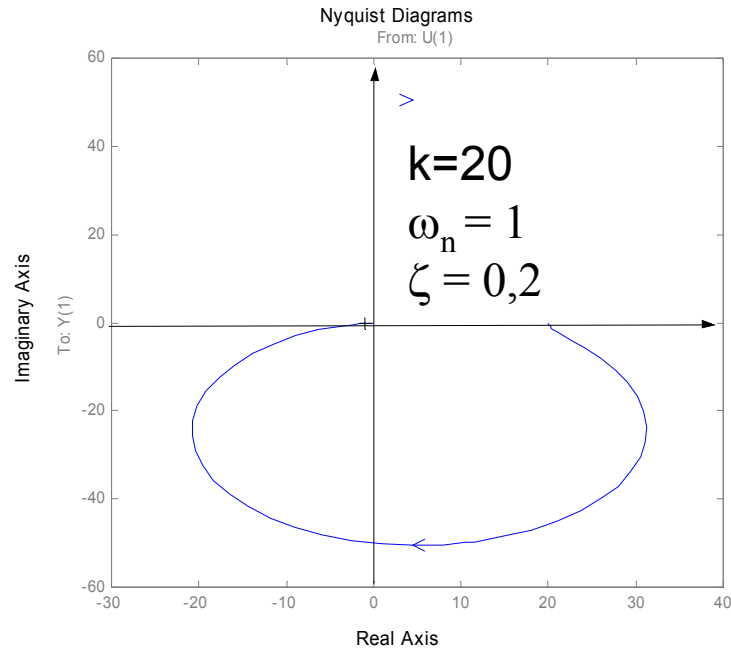
$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Człon oscylacyjny

$$h(t) = k \left[1 - \frac{e^{-\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_w t + \varphi) \right]$$

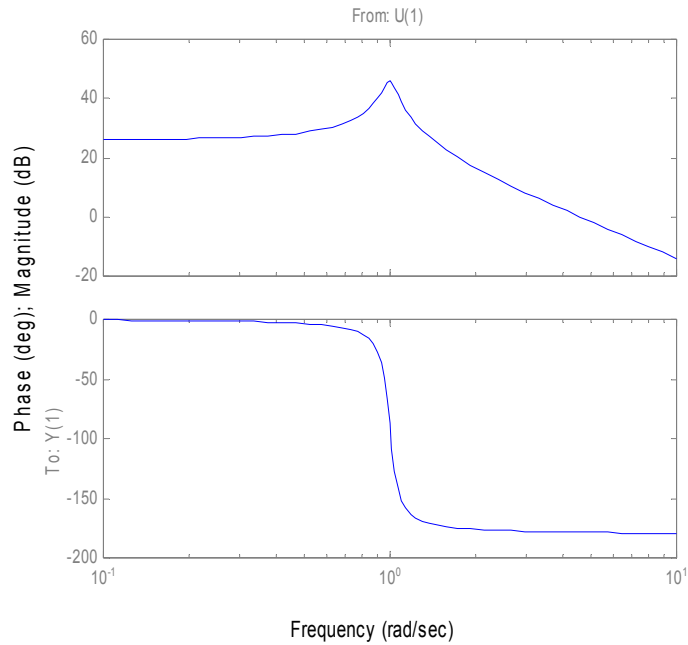


Człon oscylacyjny



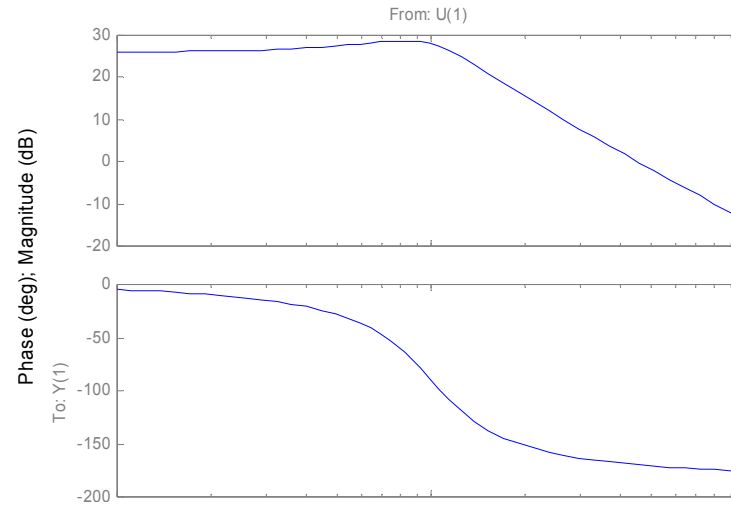
Człon oscylacyjny

Bode Diagrams



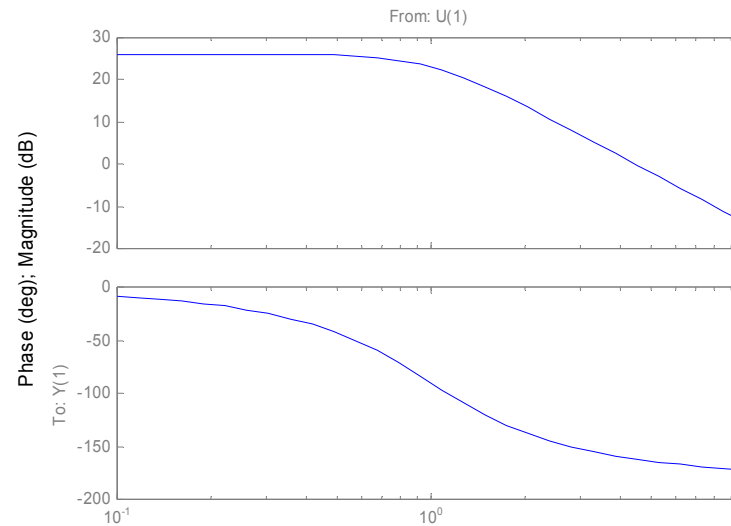
$k=20$
 $\omega_n = 1$
 $\zeta = 0,1$

Bode Diagrams



$k=20$
 $\omega_n = 1$
 $\zeta = 0,2$

Bode Diagrams

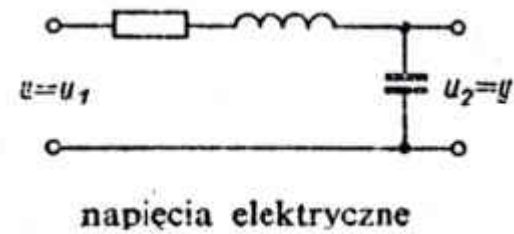


$k=20$
 $\omega_n = 1$
 $\zeta = 0,4$

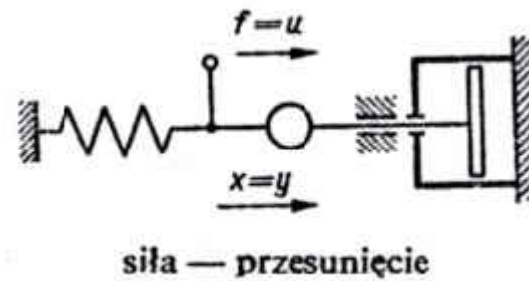
Człon oscylacyjny

Przykłady

układ RLC



układ mechaniczny



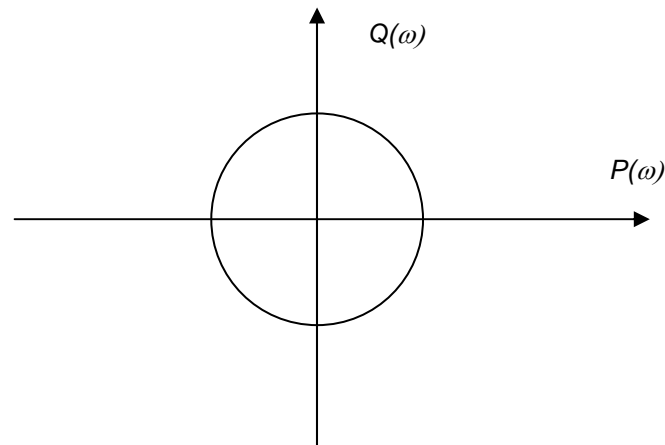
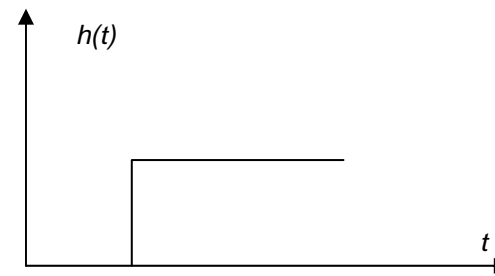
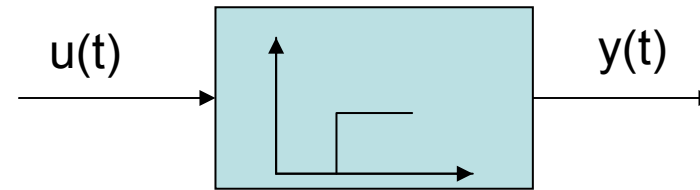
Człon opóźniający

$$y(t) = ku(t - T_0)$$

$$K(s) = ke^{-sT_0}$$

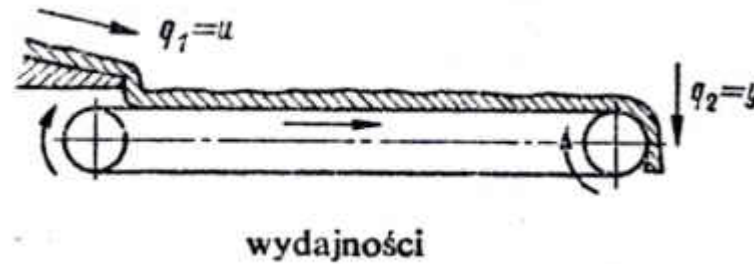
$$h(t) = k1(t - T_0)$$

$$K(j\omega) = ke^{-j\omega T_0}$$



Człon opóźniający

układ mechaniczny



układ elektryczny

