

# ALGORYTM ŚLEDZENIA TRAJEKTORII ROBOTA MOBILNEGO MK<sup>†</sup>

Krzysztof TCHOŃ, Marek KABAŁA, Marek WNUK

Politechnika Wroclawska, Instytut Cybernetyki Technicznej  
ul. Janiszewskiego 11/17, 50-372, Wrocław, e-mail: tchon|mkabala|mw@ict.pwr.wroc.pl

**Streszczenie:** Przedmiotem referatu jest algorytm śledzenia trajektorii dwukołowego robota mobilnego MK napędzanego względem wewnętrznego układu odniesienia. Algorytm wykorzystuje metodę linearyzacji modelu kinematyki i dynamiki robota przy pomocy dynamicznego sprzężenia zwrotnego. Działanie algorytmu zostało zilustrowane wynikami badań symulacyjnych.

**Słowa kluczowe:** Robot mobilny, śledzenie trajektorii, linearyzacja dynamiczna.

## 1. WPROWADZENIE

Problematyka sterowania nieholonomicznych robotów mobilnych znajduje się od dłuższego czasu w centrum zainteresowania robotyków [1, 2, 3]. Zarówno na poziomie kinematyki, jak i dynamiki rozważane są dwa zadania, różniące się stopniem trudności i wymagające zasadniczo odmiennego sposobu podejścia: zadanie sterowania punktowego (stabilizacji) i zadanie sterowania ciągłego (śledzenia trajektorii). Przegląd problemów stabilizacji kinematyki układów nieholonomicznych zawiera praca [4]. Typowym narzędziem stosowanym do syntezy algorytmów śledzenia trajektorii układów nieholonomicznych jest linearyzacja przez statyczne lub dynamiczne sprzężenie zwrotne [1]. Przypomnijmy, że istotą metody linearyzacji przez dynamiczne sprzężenie zwrotne jest zdefiniowanie tzw. wyjść linearyzujących układu i takie rozszerzenie dynamiki układu, żeby było możliwe odsprężenie i linearyzacja odwzorowania między wejściami a wyjściami linearyzującymi. Należy zauważyć, że warunkiem poprawnego działania algorytmów sterowania opartego na linearyzacji dynamicznej jest pozostawanie sterowanego obiektu w ruchu; algorytmy te ze swojej natury nie nadają się do sterowania obiektów nieruchomych, ani do ich zatrzymania lub ruszenia z miejsca. Przykładowe zastosowanie dynamicznego sprzężenia zwrotnego do sterowania kinematyką manipulatora mobilnego przedstawiono w pracy [5].

W niniejszym referacie zajmujemy się zadaniem śledzenia trajektorii dwukołowego robota mobilnego MK, skonstruowanego w Zakładzie Podstaw Cybernetyki i Robotyki Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechni-

ki Wroclawskiej. Robot MK jest napędzany względem poruszającego się korpusu robota, co uniemożliwia odseparowanie jego kinematyki od dynamiki i wymaga sterowanie robotem jako integralną całością. Założenie o braku poślizgu boczno i wzdłużnego kół robota powoduje, że jest on układem nieholonomicznym. Model kinematyki i dynamiki robota MK, wyprowadzony w oparciu o Zasadę d'Alemberta [3], ma postać afinicznego układu sterowania z 8-miowymiarową przestrzenią stanu i dwoma wejściami sterującymi odpowiadającymi momentom napędowym kół robota. Dla takiego modelu wybieramy współrzędne położenia charakterystycznego punktu robota jako wyjścia linearyzujące i dokonujemy odsprężenia i linearyzacji odwzorowania wejście-wyjście wykorzystując dynamiczne sprzężenie zwrotne z 1-wymiarowym rozszerzeniem dynamiki układu. W rezultacie, odwzorowanie to uzyskuje prostą strukturę złożoną z dwóch równoległych łańcuchów zawierających po 3 integratory połączone szeregowo. Struktura odwzorowania wejście-wyjście pozwala rozwiązać zadanie śledzenia przy użyciu liniowego regulatora rzędu 3. Algorytm sterowania robota MK został pokazany na rysunku 2. Badania symulacyjne potwierdziły efektywność działania algorytmu i pokazały, że zapewnia on bardzo dobrą jakość sterowania, zależną od wzmocnień regulatora liniowego.

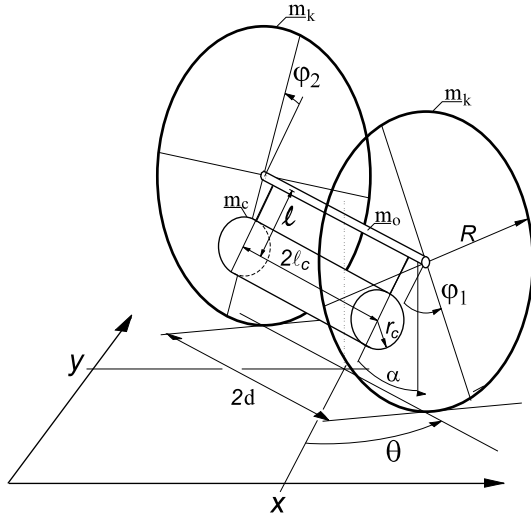
Układ referatu jest następujący. W rozdziale 2 opisujemy model kinematyki i dynamiki robota MK. Rozdział 3 został poświęcony syntezie algorytmu sterowania. Wyniki badań symulacyjnych przedstawia rozdział 4. Rozdział 5 stanowi podsumowanie referatu.

## 2. MODEL DYNAMIKI ROBOTA MK

Robot MK jest dwukołowym nieholonomicznym robotem mobilnym napędzanym względem wewnętrznego układu odniesienia [6, 7]. Schemat robota, zawierający definicje jego współrzędnych kinematycznych oraz parametrów geometrycznych i dynamicznych, przedstawia rysunek 1.

We współrzędnych  $(x, y, \phi_1, \phi_2, \alpha, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  i przy oznaczeniach  $\eta_{123} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$ ,  $\theta = \frac{R}{2d}(\phi_2 - \phi_1)$ , równania kinematyki robota, uwzględniające brak poślizgu kół, są

<sup>†</sup>Praca wykonana w ramach grantu statutowego KBN. Symulacje komputerowe zrealizowano przy wykorzystaniu programu MATLAB udostępnionego przez Wrocławskie Centrum Sieciowo-Superkomputerowe.



Rys. 1. Schematyczny rysunek robota mobilnego MK.

następujące

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \eta_{123} \cos \theta, & \dot{y} &= \eta_{123} \sin \theta, \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{2}{R} \eta_1, & \dot{\phi}_2 &= \frac{2}{R} \eta_2, & \dot{\alpha} &= \frac{1}{R} \eta_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Interpretacja współrzędnych  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  wynika bezpośrednio ze wzoru (1). Przyjmując, że wielkościami sterującymi  $u_1, u_2$  robota są momenty napędowe kół wywierane przez silniki, uzyskujemy równania dynamiki postaci

$$M(\alpha) \dot{\eta} + N(\alpha, \eta) = Bu, \quad (2)$$

zawierające macierz bezwładności

$$M(\alpha) = M = \begin{bmatrix} (m_c + \frac{4}{3}m_o + 8m_k) d^2 + m_k R^2 + m_c (\ell^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\ell_c^2 + \frac{1}{2}r_c^2) & & \\ (m_c + \frac{2}{3}m_o) d^2 - m_k R^2 - m_c (\ell^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\ell_c^2 + \frac{1}{2}r_c^2) & & \\ (m_c + m_o + 4m_k + \frac{m_c \ell}{R} \cos \alpha) d^2 & & \\ (m_c + \frac{2}{3}m_o) d^2 - m_k R^2 - m_c (\ell^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\ell_c^2 + \frac{1}{2}r_c^2) & & \\ (m_c + \frac{4}{3}m_o + 8m_k) d^2 + m_k R^2 + m_c (\ell^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{3}\ell_c^2 + \frac{1}{2}r_c^2) & & \\ (m_c + m_o + 4m_k + \frac{m_c \ell}{R} \cos \alpha) d^2 & & \\ (m_c + m_o + 4m_k + \frac{m_c \ell}{R} \cos \alpha) d^2 & & \\ (m_c + m_o + 4m_k + \frac{m_c \ell}{R} \cos \alpha) d^2 & & \\ (m_c + m_o + 4m_k + \frac{2m_c \ell}{R} \cos \alpha + \frac{m_c}{R^2} (\ell^2 + \frac{1}{2}r_c^2)) d^2 & & \end{bmatrix},$$

wektor momentów sił Coriolisa, odśrodkowych i tarcia lepkiego

$$N(\alpha, \eta) = N = \begin{pmatrix} -m_c \ell \sin \alpha (2\eta_2 + \eta_3) (\eta_2 - \eta_1) - \\ \frac{2m_c \ell^2}{R} \sin \alpha \cos \alpha \eta_3 (\eta_2 - \eta_1) - \frac{m_c d^2 \ell \sin \alpha}{R^2} \eta_3^2 + \frac{4d^2 k_1}{R^2} \eta_1 \\ m_c \ell \sin \alpha (2\eta_1 + \eta_3) (\eta_2 - \eta_1) + \\ \frac{2m_c \ell^2}{R} \sin \alpha \cos \alpha \eta_3 (\eta_2 - \eta_1) - \frac{m_c d^2 \ell \sin \alpha}{R^2} \eta_3^2 + \frac{4d^2 k_2}{R^2} \eta_2 \\ -\frac{m_c \ell \sin \alpha}{R} (\eta_2 - \eta_1)^2 (R + \ell \cos \alpha) - \frac{m_c \ell d^2}{R^2} \sin \alpha \eta_3^2 + \\ \frac{m_c g \ell d^2}{R} \sin \alpha \end{pmatrix}$$

i macierz sterowań

$$B = \frac{2d^2}{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3. ALGORYTM STEROWANIA

Będziemy rozważać zadanie śledzenia trajektorii  $(x_d(t), y_d(t))$  charakterystycznego punktu robota MK, leżącego na środku osi kół. W tym celu wybieramy współrzędne  $y_1 = x$ ,  $y_2 = y$  tego punktu jako wyjścia linearyzujące i szukamy możliwości odsprężenia układu (1)-(2) z tymi wyjściami przy pomocy sprzężenia zwrotnego od stanu. Kolejne różniczkowanie wyjść linearyzujących daje następujące wyniki

$$\dot{y}_1 = \dot{x} = \eta_{123} \cos \theta, \quad \dot{y}_2 = \dot{y} = \eta_{123} \sin \theta$$

oraz

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = \dot{\eta}_{123} \cos \theta - \eta_{123} \sin \theta \dot{\theta} = \dot{\eta}_{123} \cos \theta - \\ \eta_{123} \sin \theta \frac{1}{d} (\eta_2 - \eta_1) = \dot{\eta}_{123} \cos \theta - \dot{y}_2 \frac{1}{d} (\eta_2 - \eta_1) \\ \ddot{y}_2 = \dot{\eta}_{123} \sin \theta + \eta_{123} \cos \theta \dot{\theta} = \dot{\eta}_{123} \sin \theta + \\ \eta_{123} \cos \theta \frac{1}{d} (\eta_2 - \eta_1) = \dot{\eta}_{123} \sin \theta + \dot{y}_1 \frac{1}{d} (\eta_2 - \eta_1). \end{cases}$$

Przy oznaczeniach

$$\eta_{123} = P\eta, \quad \frac{1}{d} (\eta_2 - \eta_1) = Q\eta,$$

gdzie

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ostatnie dwie formuły przyjmują postać

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = P \dot{\eta} \cos \theta - \dot{y}_2 Q \eta, \\ \ddot{y}_2 = P \dot{\eta} \sin \theta + \dot{y}_1 Q \eta, \end{cases}$$

czyli, biorąc pod uwagę równania (2),

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\dot{y}_2 Q \eta - P M^{-1} N \cos \theta + P M^{-1} B \cos \theta u \\ \ddot{y}_2 = \dot{y}_1 Q \eta - P M^{-1} N \sin \theta + P M^{-1} B \sin \theta u. \end{cases} \quad (3)$$

Nietrudno zauważyć, że macierz

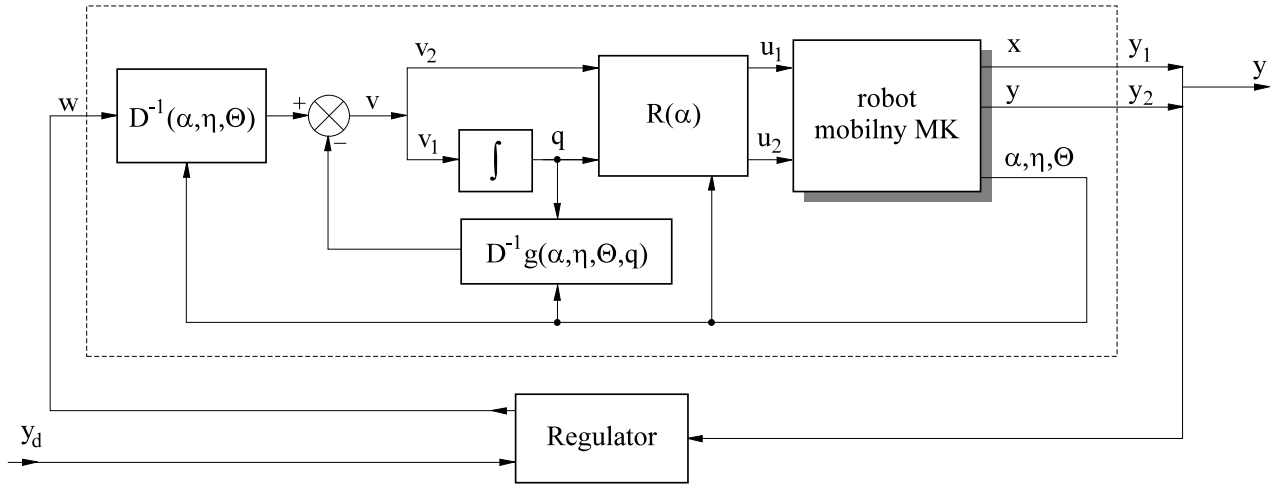
$$\begin{bmatrix} P \cos \theta \\ P \sin \theta \end{bmatrix} M^{-1} B$$

statycznego odsprężenia układu (3) jest osobliwa. Poszukując możliwości odsprężenia dynamicznego zdefiniujemy nową współzrędną stanu

$$q = P M^{-1} B u$$

i przepiszemy równania (3) w postaci

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\dot{y}_2 Q \eta - P M^{-1} N \cos \theta + q \cos \theta \\ \ddot{y}_2 = \dot{y}_1 Q \eta - P M^{-1} N \sin \theta + q \sin \theta, \end{cases}$$



Rys. 2. Schemat blokowy algorytmu sterowania

dogodnej do dalszego różniczkowania. Pochodne rzędu trzeciego wyjść linearyzujących można wyrazić w postaci

$$\begin{aligned} y_1^{(3)} &= f_1(\alpha, \eta, \theta, q) + \dot{q} \cos \theta - \dot{y}_2 Q M^{-1} B u - \\ &\quad P M^{-1} \frac{\partial N}{\partial \eta} M^{-1} B \cos \theta u, \\ y_2^{(3)} &= f_2(\alpha, \eta, \theta, q) + \dot{q} \sin \theta + \dot{y}_1 Q M^{-1} B u - \\ &\quad P M^{-1} \frac{\partial N}{\partial \eta} M^{-1} B \sin \theta u. \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} f_1(\alpha, \eta, \theta, q) &= -\dot{y}_2 Q \eta - \frac{\partial(P M^{-1} N)}{\partial \alpha} \frac{\eta_3}{R} \cos \theta + \\ &\quad (P M^{-1} N - q) Q \eta \sin \theta + \dot{y}_2 Q M^{-1} N + \\ &\quad P M^{-1} \frac{\partial N}{\partial \eta} M^{-1} N \cos \theta, \\ f_2(\alpha, \eta, \theta, q) &= -\dot{y}_1 Q \eta - \frac{\partial(P M^{-1} N)}{\partial \alpha} \frac{\eta_3}{R} \sin \theta - \\ &\quad (P M^{-1} N - q) Q \eta \cos \theta - \dot{y}_1 Q M^{-1} N + \\ &\quad P M^{-1} \frac{\partial N}{\partial \eta} M^{-1} N \sin \theta. \end{aligned}$$

Wprowadzenie nowych wejść

$$\dot{q} = v_1, \quad Q M^{-1} B u = v_2, \quad (5)$$

takich że

$$\begin{bmatrix} P M^{-1} B \\ Q M^{-1} B \end{bmatrix} u = \begin{pmatrix} q \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow u = R \begin{pmatrix} q \\ v_2 \end{pmatrix} = R_1 q + R_2 v_2,$$

$$R = R(\alpha) = \begin{bmatrix} P M^{-1} B \\ Q M^{-1} B \end{bmatrix}^{-1},$$

przekształca wzór (4) do postaci

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \end{pmatrix} &= g(\alpha, \eta, \theta, q) + \\ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\dot{y}_2 - h(\alpha, \eta) \cos \theta \\ \sin \theta & \dot{y}_1 - h(\alpha, \eta) \sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= g + D v, \end{aligned} \quad (6)$$

przy odpowiednio zdefiniowanych funkcjach  $g$  i  $h$ . Łatwo zauważyć, że nowa macierz odsprężenia  $D = D(\alpha, \eta, \theta)$

jest nieosobliwa, o ile tylko prędkość ruchu postępowego robota

$$\dot{y}_1 \cos \theta + \dot{y}_2 \sin \theta \neq 0.$$

Przy założeniu, że robot się porusza, sprzężenie zwrotne

$$w = g + D v \Rightarrow v = -D^{-1} g + D^{-1} w$$

pozwala na uzyskanie w układzie (1)-(2) rozszerzonym o (5) odsprężonego odwzorowania wejście-wyjście

$$\begin{pmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Do śledzenia trajektorii  $(x_d(t), y_d(t))$  wystarczy zatem zastosować regulator liniowy

$$\begin{cases} w_1 = y_{1d}^{(3)} - k_{12}(\dot{y}_1 - \dot{y}_{1d}) - k_{11}(y_1 - y_{1d}) - k_{10}(y_1 - y_{1d}) \\ w_2 = y_{2d}^{(3)} - k_{22}(\dot{y}_2 - \dot{y}_{2d}) - k_{21}(y_2 - y_{2d}) - k_{20}(y_2 - y_{2d}) \end{cases} \quad (8)$$

ze wzmocnieniami dobranymi w taki sposób, by układ równań błędów regulacji  $e_1 = y_1 - y_{1d}$ ,  $e_2 = y_2 - y_{2d}$ ,

$$\begin{cases} e_1^{(3)} + k_{12} \dot{e}_1 + k_{11} e_1 + k_{10} e_1 = 0 \\ e_2^{(3)} + k_{22} \dot{e}_2 + k_{21} e_2 + k_{20} e_2 = 0, \end{cases}$$

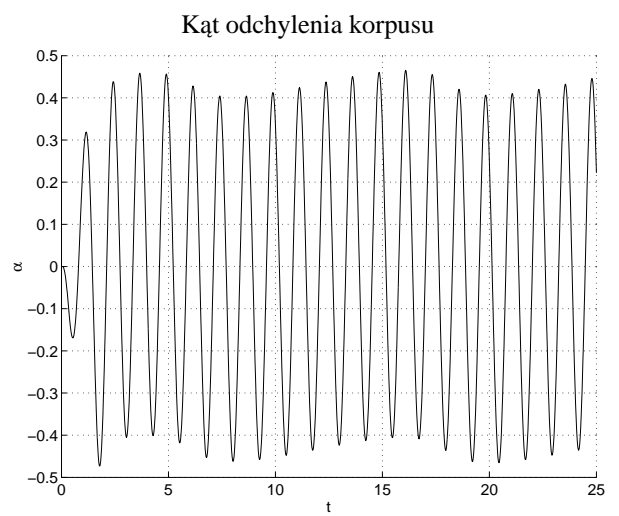
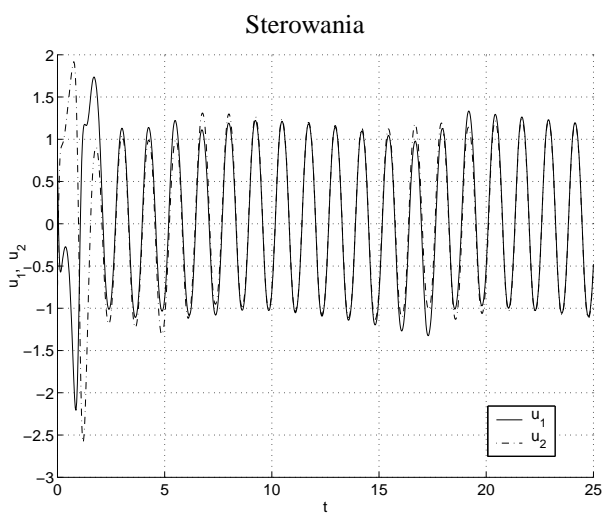
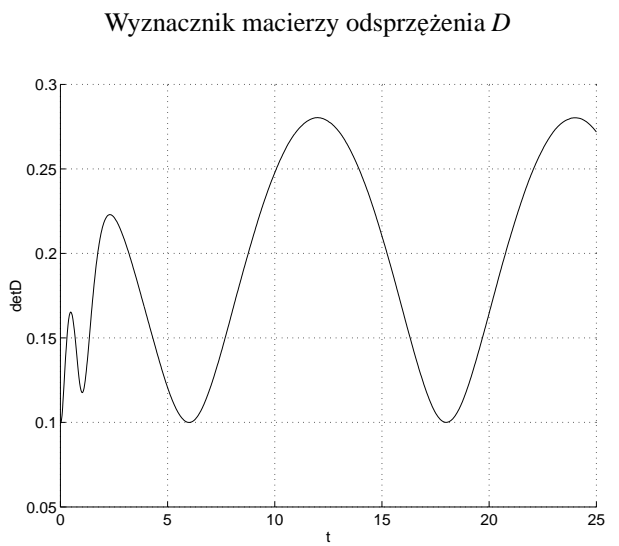
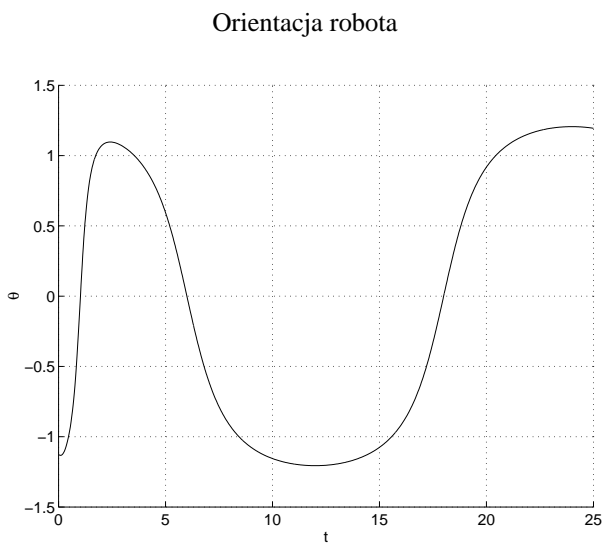
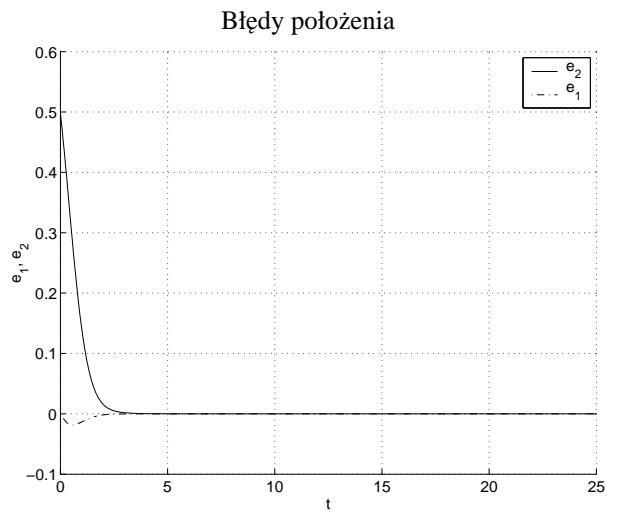
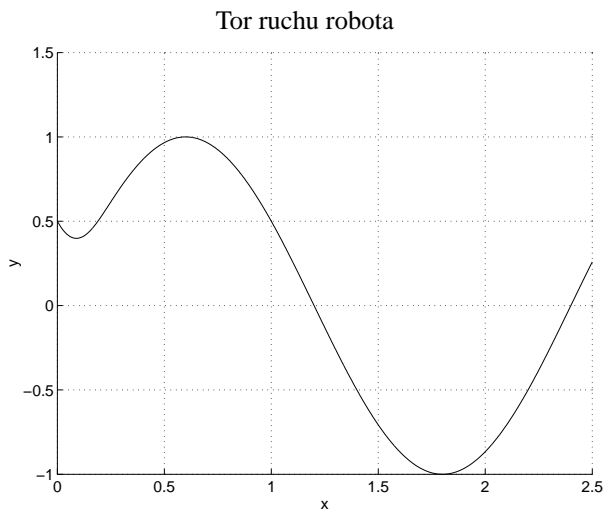
był asymptotycznie stabilny. Schemat blokowy algorytmu śledzenia trajektorii, którego syntezy dokonaliśmy w tym rozdziale został przedstawiony na rysunku 2.

#### 4. SYMULACJE KOMPUTEROWE

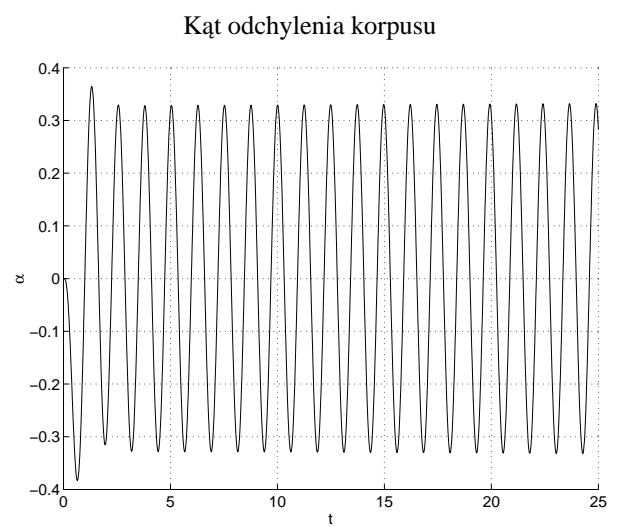
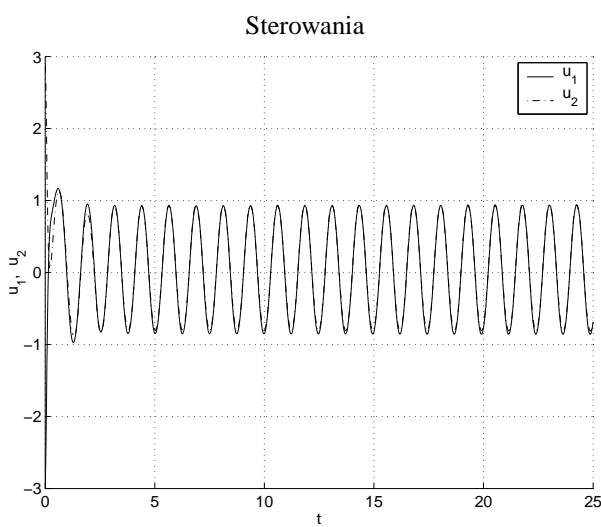
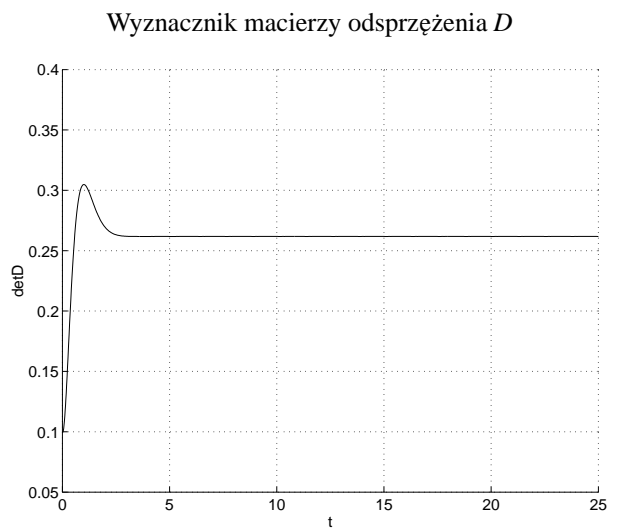
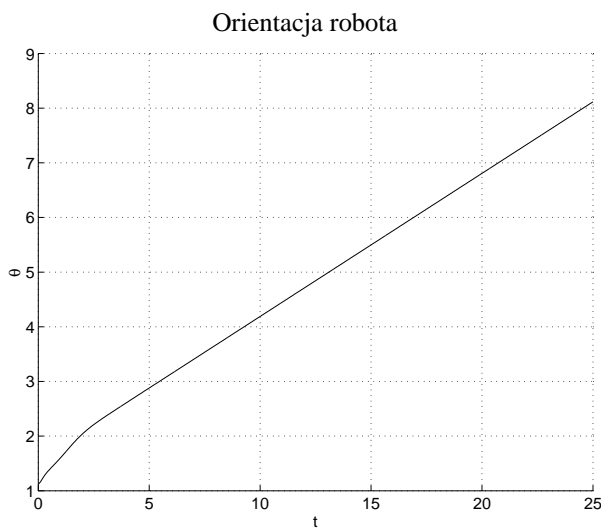
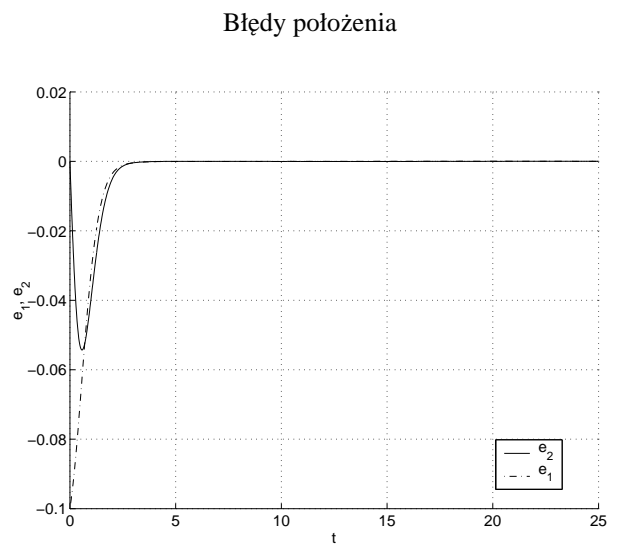
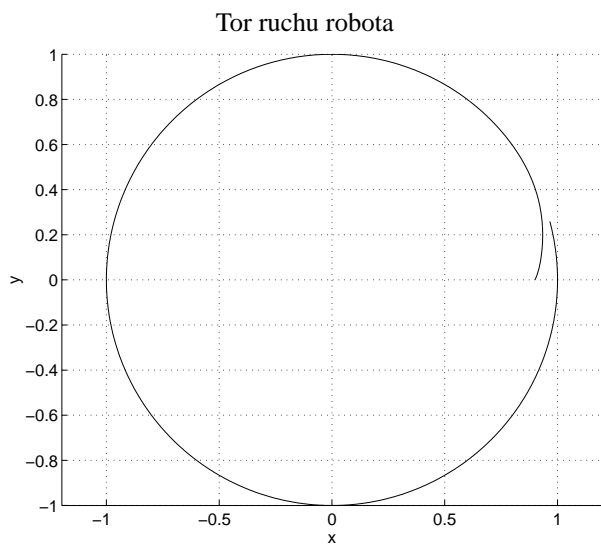
W celu zilustrowania działania zaproponowanego algorytmu sterowania przeprowadziliśmy symulacje w środowisku MATLAB. Przyjęliśmy parametry modelu robota zgodne z obiektem rzeczywistym [6, 7] ( $m_k = 2$ ,  $m_o = 0.5$ ,  $m_c = 7$ ,  $R = 0.254$ ,  $l = 0.12$ ,  $d = 0.225$ ,  $l_c = 0.165$ ,  $r_c = 0.035$ ,  $k_1 = k_2 = 0.05$ ). Wzmocnienia regulatora ( $k_{10} = k_{20} = 7$ ,  $k_{11} = k_{21} = 20$ ,  $k_{12} = k_{22} = 20$ ) zostały dobrane metodą Hurwitza.

Dla sinusoidalnej trajektorii zadanej

$$\begin{cases} x_d(t) = \frac{1}{10} t \\ y_d(t) = \sin\left(\frac{\pi}{12} t\right) \end{cases} \quad (9)$$



Rys. 3. Wyniki symulacji dla trajektorii sinusoidalnej (9)



Rys. 4. Wyniki symulacji dla trajektorii kołowej (10)

i stanu początkowego ( $x = 0$ ,  $y = 0.5$ ,  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_2 = -1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\eta_1 = 0.05$ ,  $\eta_2 = 0.05$ ,  $\eta_3 = 0$ ,  $q = 0$ ) uzyskaliśmy śledzenie trajektorii z małymi błędami przy niewielkich amplitudach sygnałów sterujących (rysunek 3). Dla kołowej trajektorii zadanej

$$\begin{cases} x_d(t) = \cos(\frac{\pi}{12}t) \\ y_d(t) = \sin(\frac{\pi}{12}t) \end{cases} \quad (10)$$

i stanu początkowego ( $x = 0.9$ ,  $y = 0$ ,  $\varphi_1 = -1$ ,  $\varphi_2 = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\eta_1 = 0.05$ ,  $\eta_2 = 0.05$ ,  $\eta_3 = 0$ ,  $q = 0$ ) wyniki symulacji okazały się również zadowalające (rysunek 4).

## 5. ZAKOŃCZENIE

Korzystając z metody linearyzacji modelu robota przez dynamiczne sprzężenie zwrotne uzyskaliśmy algorytm sterowania dwukołowego robota mobilnego MK, realizujący śledzenie zadanej trajektorii ruchu robota na płaszczyźnie. Przy syntezy algorytmu wykorzystaliśmy nieholonomiczny model kinematyki oraz model dynamiki robota MK uwzględniający bezwładności, siły Coriolisa i tarcie lepkie. Opisany algorytm sterowania pracuje poprawnie przy zachowaniu warunku, że macierz odsprężenia  $D = D(\alpha, \eta, \theta)$  jest nieosobliwa (prędkość ruchu postępowego robota jest różna od zera).

Wyniki przeprowadzonych symulacji pokazują, że algorytm śledzenia trajektorii zapewnia efektywną redukcję błędu położenia przy niewielkich wzmocnieniach regulatora i niewielkich amplitudach sygnałów sterujących (momentów wywieranych przez silniki). Własność ta ma duże znaczenie z punktu widzenia możliwości implementacji algorytmu na rzeczywistym robocie. Kolejnym zadaniem wynikającym z logiki podjętych badań będzie zaimplementowanie przedstawionego algorytmu w sterowniku prototypu laboratoryjnego robota mobilnego MK.

### TRAJECTORY TRACKING ALGORITHM FOR MK MOBILE ROBOT

**Abstract:** The paper presents a trajectory tracking algorithm for a two wheel mobile robot MK driven with respect to an internal coordinate frame. The algorithm exploits a linearization procedure of robot kinematics and dynamics equations by a dynamic feedback. The performance of the algorithm has been illustrated with results of computer simulations.

### Literatura

- [1] B. d'Andrea-Novell, G. Campion i G. Bastin, Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization, *Int. J. Robot. Res.*, vol. 14, no. 6, 1995, ss. 543-559.
- [2] C. Canudas de Wit, B. Siciliano i G. Bastin, *Theory of Robot Control*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [3] K. Tchoń, A. Mazur, I. Duleba, R. Hossa i R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: Modele, planowanie ruchu i sterowanie*, Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa 2000.
- [4] P. Morin i C. Samson, Feedback control of nonholonomic wheeled vehicles. A survey, *Archives of Control Sciences*, w druku.
- [5] J. Jakubiak i K. Tchoń, The continuous inverse kinematic problem for mobile manipulators: a case study in the dynamic extension, *Proc. 2001 IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, Seoul, 2001, ss. 2401-2406.
- [6] M. Kabała, K. Tchoń i M. Wnuk, Robot mobilny napędzany w układzie wewnętrznym, *Materiały VII Krajowej Konferencji Robotyki*, Łądek-Zdrój, 2001, t. 1, ss. 149-158.
- [7] M. Kabała, K. Tchoń i M. Wnuk, Dwukołowy nieholonomiczny robot mobilny, *Materiały Konferencji Automation 2002*, Warszawa, 2002, ss. 269-280.